

УДК: 368.01

1.2. Анализ распределения ресурсов аналитическими и численными методами

Малиновский В.К.
ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

В вероятностных моделях распределения ресурсов между многими предприятиями некоторой отрасли в некоторый временной период (например: неделя, месяц, квартал) возникают сложные суммы, на которые в естественных условиях распространяются (см. [5]) аналитические результаты классической теории суммирования, такие как нормальное приближение и его уточнения. Использование таких аналитических результатов в практических целях требует более высокой теоретической подготовки, чем та, которая необходима для проведения имитационного моделирования. Аналитические результаты дополняют численные расчеты и верифицируют их, давая представление о том, в каком диапазоне численные результаты должны находиться. В статье обсуждается применимость на практике аналитических результатов для сложных сумм и баланс между имитационными и аналитическими методами, волнующий специалистов с начала компьютерной эры.

Введение

Нобелевская премия по экономике 1975 года была присуждена Л.В. Канторовичу и Тьяллинг Купмансу "за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов". Исследование этой экономической проблемы было основано на таких достижениях в математике, как задача линейного программирования. В известном смысле она состоит в поиске экстремума линейного функционала при линейных ограничениях.

1. Вероятностные модели распределения ресурсов и сложные суммы случайных величин

Рассмотрим следующие простейшие вероятностные модели в задачах распределения ресурсов с ограничениями и случайностью.

Пример 1: промышленные предприятия с ограниченным ресурсом. Предположим, что отрасль экономики¹ состоит из ряда промышленных предприятий, рассматриваемых в некоторый временной период (например: неделя, месяц, квартал), выбор которого несущественен. Обозначим через t общий ресурс отрасли, например энергию, в этот временной период. Если случайная величина T_i обозначает энергию, потребляемую в рассматриваемый период i -м предприятием², то работать при указанных ограничениях может только случайное число предприятий, определяемое принимающей целочисленные значения случайной величиной $\bar{N}_t = \sup\{n \geq 1: \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}$, или 0, если множество в фигурных скобках пусто. Обозначив через X_i продукцию i -го предприятия, мы получим, что сложная сумма $S_{\bar{N}_t} := \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} X_i$ — это совокупный продукт отрасли, обладающей ограниченным ресурсом. Последовательность $(T_i, X_i), i = 1, 2, \dots$, будем называть базисом, а сложную сумму $S_{\bar{N}_t}$ — $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ -суммой³.

Если не предполагать независимости предприятий друг от друга, то сложная сумма $S_{\bar{N}_t}$ будет не $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ — суммой, а $\mathcal{R}/\mathcal{D}$ — суммой⁴. Такую сложную сумму рассмотрим в следующем примере.

Пример 2: кластеризованная отрасль экономики с ограниченными ресурсами. Пусть отрасль экономики состоит из ряда промышленных предприятий, а отчетный период — такая же фиксированная единица времени, как в Примере 1. Энергию, потребляемую i -м предприятием, по-прежнему обозначим через T_i , а производимый им продукт — через X_i . Совокупным продуктом отрасли, как в Примере 1, будет сложная сумма $S_{\bar{N}_t} := \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} X_i$, базис которой $(T_i, X_i), i = 1, 2, \dots$, вообще говоря, состоит из зависимых случайных векторов.

Рассмотрим один пример преобразования сложной суммы $S_{\bar{N}_t}$ в модульную сложную сумму, базис которой состоит из независимых модульных случайных векторов. Предположим, что предприятия принадлежат разным компаниям, которые мало влияют друг на друга, хотя взаимная зависимость предприятий внутри одной компании существенна. Объединим (мы оставляем в стороне вопрос о том, как устроена приоритетность среди компаний) предприятия, принадлежащие разным компаниям, в кластеры: нумерация предприятий производится таким образом, чтобы первыми шли T_1 предприятий компании номер 1, затем $\tau_2 := T_2 - T_1$ предприятий компании номер 2 и т.д. Общее потребление энергии k -й компанией, у которой $\tau_k := T_k - T_{k-1}$ предприятий, составляет $T_k := \sum_{i=j_{k-1}+1}^{j_k} T_i$. Число фирм, которые могут работать при условии, что общий ресурс равен t , равно $\bar{N}_t = \sup\{n \geq 1: \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}$, или 0, если множество пусто. Общий

¹ Отрасль экономики есть совокупность всех производственных единиц, осуществляющих преимущественно одинаковый или сходный вид производственной деятельности.

² Мы не будем останавливаться на факторах, влияющих на такую случайность, хотя сделать это несложно.

³ Первая буква — от “regular summation”, а вторая — от “independence”. Обратим внимание читателя на то, что случайные величины $T_i, i = 1, 2, \dots$, и $X_i, i = 1, 2, \dots$, в Примере 1 положительны и независимы.

⁴ Первая буква, по-прежнему, от “regular summation”, вторая — от “dependence”.

продукт всех этих фирм, а следовательно, и всей отрасли экономики, равен $\sum_{k=1}^{\bar{N}_t} X_k$, где X_k — продукт k -й фирмы. Эта сложная сумма отличается от исходной сложной суммы $S_{\bar{N}_t} := \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} X_i$ в основном лишь тем, что ее базис $(T_k, X_k), k = 1, 2, \dots$, образован независимыми модулями.

В следующем примере мы возвращаемся к предположению Примера 1 о независимости предприятий друг от друга⁵, но случайные величины $T_i, i = 1, 2, \dots$, больше не обязаны быть положительными.

Пример 3: промышленные предприятия и возобновляемые ресурсы. Пусть общий ресурс отрасли t — это совокупный объем отходов (например, сточных вод или оксидов углерода), превышение которого отраслью в отчетный период недопустимо. Пусть каждое предприятие отрасли, помимо производства своей основной продукции, обладает возможностями переработки таких отходов и даже предоставляет услуги по такой переработке сторонним организациям. Другими словами, оно производит противоположность собственным загрязнениям — частично, полностью или даже в избытке. В этих предположениях общий объем промышленного производства моделируется сложной суммой, базис которой состоит из независимых случайных векторов $(T_i, X_i), i = 1, 2, \dots$. Когда очистка интенсивнее загрязнения, компоненты T_i принимают отрицательные значения, что приводит к “нерегулярности” суммирования: такая сумма не обязана строго возрастать при росте числа слагаемых.

В Примере 3 центральным объектом является сложная сумма вида $S_{\bar{N}_t} := \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} X_i$, где $\bar{N}_t = \inf\{n \geq 1: \sum_{i=1}^n T_i > t\}$, или $+\infty$, если множество пусто, которую назовем $\mathcal{I}/\mathcal{I}$ -суммой (первая буква от “irregular summation”, вторая — от “independence”). Легко видеть, что структура распределения случайных величин T_i (говоря нестрого, сколько вероятностной массы расположено справа и слева от нуля) играет существенную роль. Как и в Примере 2, но на основе других соображений, сложную сумму $S_{\bar{N}_t}$ можно представить в виде модульной сложной $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ -суммы.

Пример 4: кластеризованная отрасль экономики и возобновляемые ресурсы. В контексте модели переработки отходов из Примера 3 предположим, что предприятия различных компаний, в совокупности составляющие отрасль экономики, содержатся в кластерах, зависимость между которыми незначительна. Примерами таких кластеров могут служить регионы или страны, взаимодействие между которыми развито слабо. Зависимость предприятий друг от друга присутствует, то есть базис $(T_i, X_i), i = 1, 2, \dots$ состоит из зависимых векторов. Кроме этого, $T_i, i = 1, 2, \dots$ необязательно положительны. В этом примере возникает сложная сумма $S_{\bar{N}_t}$, которую назовем $\mathcal{I}/\mathcal{D}$ -суммой (первая буква от “irregular summation”, вторая — от “dependence”). Нас будет интересовать ситуации, в которых эту сложную сумму можно представить в виде модульной сложной $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ -суммы.

Классические результаты теории суммирования, такие как нормальная аппроксимация, оценки скорости сходимости к нормальному распределению и асимптотические разложения Эджворта-Крамера, распространены на сложные суммы из Примеров 1–4 в [5]. Ниже приводятся некоторые соображения об использовании этих аналитических результатов.

2. Вычисления на основе аналитических результатов

Познавательная ценность вероятностного анализа в значительной мере определяется предельными теоремами⁶. До середины 20-го века главными из них были предельные теоремы для обыкновенных (в отличие от сложных, рассмотренных в Примерах 1–4) сумм независимых случайных величин: центральная предельная теорема и ее уточнения, такие как оценка скорости сходимости и асимптотические разложения Эджворта-Крамера.

Предельные теоремы теории вероятностей изначально были вычислительным инструментом в задачах, которые не имеют явного аналитического решения или в которых использование такого решения сложно для вычислений. Например, теорема Муавра-Лапласа позволяет переходить от факториалов к показательным функциям в выражениях, связанных с испытаниями Бернулли. Разложение Эджворта-Крамера с явно выписанными корректирующими выражениями, в которых заключено больше информации об отдельных слагаемых, чем дают их математическое ожидание и дисперсия, часто позволяет повысить точность аппроксимации. Если бы компьютеры не были изобретены, то предельные теоремы и по сей день оставались бы основой для алгоритмов вычислений, чем они были изначально.

До изобретения компьютеров многие технические сложности, возникавшие при попытках применения аналитических результатов в вычислительных целях, считались неразрешимыми, а сами эти аналитические результаты непригодными для вычислений. В особо важных случаях вычисления производились большим числом людей, вооруженных арифмометрами. В компьютерную эпоху стоимость элементарных арифметических операций снизилась. Поэтому на первый план вышли численные методы, такие как имитационное моделирование.

⁵ То есть, базис $(T_i, X_i), i = 1, 2, \dots$, состоит из независимых векторов.

⁶ Это цитата из книги [1]. Полезно отметить, что предельные теоремы теории вероятностей, в отличие от результатов теории случайных процессов и, в известном смысле, от самой этой теории, появились (например, теоремы Бернулли и Муавра—Лапласа) задолго до аксиоматизации теории вероятностей.

3. Прямое имитационное моделирование и моделирование, основанное на аналитике

С распространением компьютеров стремление к замене аналитических приближений вычислительными выходит на первый план. Обычно методы, требующие интенсивного использования компьютеров (см., например, [3], [8]), можно определить как повторение простых вычислений, таких как генерация псевдослучайных чисел и их использование так, как это требуется в определении изучаемого объекта. Наиболее часто применяемая разновидность таких методов — имитационное моделирование. Суть этого ресурсоемкого метода⁷ остается той же, что и при подбрасывании монеты. Разница заключается лишь в том, что физический эксперимент фактически не проводится, а результаты эксперимента “воспроизводятся” или “моделируются” компьютерной программой с помощью псевдослучайных чисел⁸. Технически, мы различаем:

- прямую (или наивную) процедуру имитационного моделирования для сложной суммы, в вычислении вероятностных характеристик которой используется только ее определение.
- интеллектуальную процедуру имитационного моделирования для сложной суммы с использованием предельных теорем в терминах числовых характеристик (например, степенных моментов и семиинвариантов) элементов исходного базиса или модулей, если модульный анализ применялся. Такое имитационное моделирование в значительной степени сводится к численным методам нахождения указанных числовых характеристик для исходных или модульных случайных величин, которое намного проще прямой процедуры имитационного моделирования для сложной суммы.

4. Баланс между имитационным моделированием и аналитическими методами

Проблема баланса имитационного моделирования, который — даже при безошибочном программировании — является лишь численным методом, не дающим общих ответов, и аналитическими методами, ограниченность применимости которых была давно ясна, волновала ученых в 1980-х годах, в самом начале эры массовой компьютеризации.

Важно выработать правильный подход к балансу между имитационными и аналитическими методами, чтобы одни дополняли другие. С одной стороны (см. [6], стр. 45), аналитическое исследование, даже в сильно упрощенной ситуации, может подсказать полезные идеи для имитационного анализа. Например, оно помогает правильно учитывать особенности модели. Предварительное аналитическое исследование основных переменных, участвующих в модели, может улучшить модель за счет выбора наиболее подходящих распределений. В целом, предварительное знакомство с моделью посредством аналитического исследования может помочь как выработке разумной стратегии моделирования, так и оптимизации вычислений.

С другой стороны, моделирование может помочь нам реабилитировать аналитические методы в глазах практиков. Хотя некоторые специалисты считают, что большинство аналитических методов основано на неестественных предположениях, их использование полезно для верификации (например, в процессе отладки и поиска ошибок программирования) результатов численных расчетов. Это можно сделать, сравнив полученные численные результаты с ожидаемыми теоретическими результатами, пусть даже и в тех же условиях, в которых последние были получены.

Подводя итог, следует отметить, что традиционные аналитические методы и методы моделирования ни при каких обстоятельствах не следует рассматривать как конкурирующие. Общее правило (см. [2], с. 154) заключается в том, что аналитические исследования следует проводить всегда, когда это возможно. Однако следует избегать искушения манипулировать предпосылками модели, упрощая ее лишь затем, чтобы сделать такое аналитическое исследование возможным. Особенно следует избегать нарушений применимости модели в реальных условиях.

5. Заключение: применимы ли аналитические методы на практике?

Поскольку любая теория в конечном итоге предназначена для практического применения, основным является вопрос, вынесенный в заголовок этого раздела. В контексте страхового регулирования он возник в конце 1970-х годов в связи с началом массового использования компьютеров, которые, как считали некоторые, сделали из многих прежде знаменитых аналитических результатов (например, из предельных теорем Крамера-Лундберга в коллективной теории риска) ненужный пережиток прежнего научного знания.

В этой связи, опираясь на авторитет Тейво Пентикайнена⁹, имевшего огромный опыт использования научных идей в практическом регулировании страховой отрасли, мы приведем (в виде прямых цитат, в переводе на русский язык) несколько соображений, высказанных им в [6] и в [7].

⁷ Под ресурсоемкими методами мы обычно подразумеваем набор идей, которые в значительной мере зависят от доступности высокоскоростных вычислений.

⁸ О проблеме качества псевдослучайных чисел см., например, [4].

⁹ Из некролога, помещенного в журнале ASTIN Bulletin (2006), том 36, № 2: “Тейво Пентикайнен внес один из важнейших вкладов в теорию платежеспособности во второй половине 20-го века. Его основополагающие работы, положившие основы научному пониманию факторов платежеспособности, а также оптимальной величины и типа перестрахования, были написаны уже в 1950-х годах”. В 1948 году Пентикайнен являлся заведующим отдела страхования Министерства социальных дел и находился на этой должности до 1962 года. В этот период он играл значительную роль в развитии финских накопительных пенсионных схем. В 1962 году стал первым президентом и CEO вновь созданной пенсионной страховой компании Илмаринен (фин.

- ([6], стр. 45): “Одним из важных преимуществ аналитического метода, даже если он основан на весьма частных предположениях, является возможность проиллюстрировать взаимозависимость задействованных переменных. Даже если полученные значения далеки от значений, полученных при исходных предположениях, вероятно, действуя так¹⁰, можно предварительно изучить, по крайней мере, форму взаимозависимости, что облегчает понимание структуры сложной модели”.
 - ([7], стр. 30): “Достоинством подхода, основанного на имитационном моделировании, является его замечательная гибкость, позволяющая учитывать весьма общие условия и предположения. Его недостаток заключается в том, что качество результата зависит от качества выборки, а поэтому могут потребоваться большие объемы наблюдений и большие временные затраты для повышения этого качества”
 - ([6], стр. 29): “Вероятно, слишком часто поведение руководства определялось простой интуицией. Зачастую многие “опытные” менеджеры относятся с подозрением и предвзято к теоретическим соображениям, которые они легко обходят краткими комментариями об отсутствии в них практической ценности. Однако пренебрежение четкой формулировкой проблем и принципов в выборе управления не означает, что такой менеджер фактически не следует какой-либо стратегии. Напротив, любой способ принятия решений, даже пренебрежение принятием решения, является своего рода стратегией. Разница лишь в том, что стратегия “людей из практики” может быть случайным продуктом старых традиций, более или менее надежной интуиции и т.д., без какой-либо четкой формулировки и анализа различных альтернативных вариантов. Обсуждение теоретических аспектов и теоретических точек зрения, даже если результаты расчетов не представляют большой ценности, может в любом случае направить внимание на формулировку и переформулировку проблем и на осознанный анализ фактов и возможностей”.
 - ([6], стр. 44): “Одна из проблем, как практическая, так и теоретическая, заключается в том, чтобы так организовать результаты моделирования, чтобы они наилучшим образом отвечали нуждам руководства. Идея использования модели, конечно же, заключается в попытке найти оптимальную стратегию, то есть набор параметров решения, которые дают “наилучший возможный результат”. Простейший способ — это повторить процесс моделирования для различных стратегий и более или менее интуитивно попытаться найти подходящие значения параметров стратегии. Например, зафиксировав все параметры, кроме одного, и придавая ему разные значения, можно уловить, как система реагирует на такие изменения параметра. Изменяя такой “свободный параметр”, можно получить набор результатов, и, возможно, хотя бы приблизиться к оптимальной стратегии”.
 - ([6], стр. 45): “В качестве компромисса между имитационным и аналитическим методами может быть целесообразно сначала выполнить некоторые упрощенные аналитические расчеты. Найдя подходящие частные предположения, можно, вероятно, найти аналитическое решение проблемы. Насколько эти аналитические результаты справедливы также и для исходной задачи, в которой предположения более общие и более реалистичные, вероятно, в общем случае невозможно предсказать. Однако решения, полученные аналитически, могут служить для начала моделирования — так что задача оптимизации с помощью моделирования, возможно, может быть упрощена”.
- ([6], стр. 44–45): “Вместо методов моделирования, возможно, можно было бы использовать и другие методы. Вероятно, с помощью некоторых подходящих предположений в виде взаимозависимости переменных модели распределения переменных состояния можно было бы выразить аналитически. Если бы это удалось, то оптимизация стратегий, вероятно, была бы также решена аналитически, и вышеупомянутые трудности были бы преодолены. С другой стороны, модель настолько сложна и включает в себя так много переменных, что аналитическое рассмотрение всей проблемы, по-видимому, возможно только при весьма ограничительных предположениях. Они должны быть сделаны с учетом простоты расчетных операций, и тогда, возможно, придется пожертвовать способностью модели адекватно соответствовать требованиям практического управления. По этой причине мы, по крайней мере на первом этапе, отдали предпочтение методам моделирования”.

Литература

1. Гнеденко, Б.В., Колмогоров, А.Н. (1949) Предельные распределения для сумм независимых величин. ГИТТЛ, Москва, Ленинград.
2. Daykin, C.D., Pentikäinen, T., and Pesonen, M. (1996) Practical Risk Theory for Actuaries. Chapman and Hall, London, etc.
3. Diaconis, P., and Efron, B. (1983) Computer intensive methods in statistics, Sci. Amer., 248, 115-130.
4. Hellekalek, P. (1998) Good random number generators are (not so) easy to find, Mathematics and Computers in Simulation, 46, 485-505.
5. Malinovskii, V.K. (2025) Compound Sums and Modular Analysis. Quasi-Distributional Limit Theorems and Their Refinements. (готовится к публикации)

Ilmarinen), проработав в этой должности до 1977 года. Компания была одной из первых, которая стала применять пенсионные схемы, разработанные Пентикайненем в период его работы в Министерстве социальных дел Финляндии.

¹⁰ То есть, сперва проводя аналитическое исследование. — В.М.

6. Pentikäinen, T. (1975) A model of stochastic-dynamic prognosis. An application of risk theory to business planning, Scandinavian Actuarial Journal, 29-53.
7. Pentikäinen, T. (1988) On the solvency of insurers. In book: Classical Insurance Solvency Theory, ed. by D. Cummins and R. Derrig, Kluwer, Boston, etc.
8. Ripley, B.D. (1987) Stochastic Simulation. John Wiley & Sons, New York.

References in Cyrillics

1. Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. (1949) Predel'ny'e raspredeleniya dlya summ nezavisimy'x velichin. GITTL, Moskva, Leningrad.

Всеволод Константинович Малиновский, д.ф.-м.н.,
 Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ РАН), 117418,
 Нахимовский просп., 47, Москва, Россия
 IstinaresearcherID (IRID): 121051920
 Scopus Author ID: 56506806300
 ResearcherID: R-7328-2017
 ORCID: 0000-0002-6454-9647
 E-mail address: admin@actlab.ru, Vsevolod.Malinovskii@mail.ru
 URL: <http://www.actlab.ru>

Ключевые слова

Страхование, государственное регулирование, вопросы теории и методологии.

Vsevolod Malinovskii. Analysis of resource allocation using analytical and numerical methods

Keywords

Insurance, analytical methods, simulation modeling

DOI: 10.34706/DE-2025-03-02

JELclassification – C65, E42

Abstract

In probabilistic models of allocation of resources between enterprises producing the same type of products in a reference time period (e.g., week, month, quarter), compound sums naturally arise. The analytical results of classical summation theory, such as the normal approximation and its various refinements, are generalized (see [5]) to the compound sums under natural assumptions. The use of such analytical results for practical purposes requires a higher theoretical background than is needed for performing simulation. Analytical results typically complement and validate numerical results, e.g., by indicating the range within which those numerical results are expected to lie. The article discusses the practical use of analytical results for compound sums and the balance between simulation and analytical methods, which were of interest for the experts since the beginning of the computer era.