

## 1. НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 330.4, 519.8, 004.94

### 1.1. Совместимость стимулов и двойственность в условиях неполной информации

Козырев А. Н., ЦЭМИ РАН, г. Москва, Россия

*Показаны возможности оптимизации плановых решений, достичимые за счет комбинации математической техники негладкого анализа и теории игр. Последовательно проводится тезис о необходимости отличать неполноту информации от наличия случайности при построении математико-экономических моделей и принятии управлений решений. Сочетание принципа двойственности, привнесенного в оптимальное планирование из функционального анализа, и принципа совместимости стимулов из теории экономических механизмов позволяет совместить роль цен как сигнала и как стимула, значительно ослабить требования к полноте информации при решении широкого класса оптимизационных задач. Если неполнота информации, обусловлена не её фатальным отсутствием как таковой, а организационными причинами и нежеланием экономических агентов раскрывать информацию о своих интересах и возможностях, то следует искать совместимые со стимулами экономические механизмы, а не вводить в модели случайные переменные. В сочетании с развитием современных информационных технологий это открывает путь к преодолению кризиса в области применения экономико-математических методов в современной экономике.*

#### 1. Введение

Центральная тема статьи – двойственные переменные (цены) как сигналы и стимулы, главная цель – показать принципиальную возможность преодоления кризиса в области применения математических методов в современной экономике, если грамотно использовать методы теории игр и оптимизации в сочетании с цифровыми технологиями. В этом смысле статья – развитие одной из тем, намеченных ранее в серии публикаций [Козырев, 2024, 2025a, 2025b]. Речь идет о необходимости поиска совместимых со стимулами экономических механизмов с опорой на принцип двойственности в том виде, как он используется в выпуклом анализе и негладкой оптимизации, т.е. несколько шире, чем в линейном программировании и теории предельных (маржинальных) цен. Принцип двойственности позволяет взглянуть на цены с позиций геометрии и функционального анализа, находить чисто аналитическим путем математические конструкции и только потом искать их экономическую интерпретацию как сигналов и стимулов. В определенном смысле тут есть аналогия с открытием планеты Плутон сначала аналитическим путем.

Термин совместимость стимулов (*incentive compatibility*) широко используется в теории экономических механизмов – относительно новом разделе теории игр. Механизм называется совместимым со стимулами, если каждый участник может достичь наилучшего результата для себя, просто действуя в соответствии со своими истинными предпочтениями. Теория экономических механизмов все активнее используется в реальной экономике, прежде всего, для разработки новых моделей аукционов. Множество занимательных и поучительных примеров можно найти в книге [Савватеев, Филатов, 2022] с ироничным названием «Занимательная экономика. Теория экономических механизмов от А до Я». Однако, за этим названием скрывается настоящая, хотя и относительно простая математика. Линия – от занимательности к реальности и более сложной математике достойна продолжения. Игроками могут быть не только физические или юридические лица, но и сельскохозяйственные культуры, одни и те же лица в разные периоды времени или какие-то абстракции. Важно лишь наличие у них «интересов» и «выбора» между разными «стратегиями». Кавычки здесь – не украшение и не каприз. Реальный набор стратегий может быть необозрим, хотя иечен, реальные интересы могут, не подлежать раскрытию даже в тех случаях, когда они известны или просчитываемы. Об этом предстоит рассказать более подробно чуть позже.

Неполнота информации, учитываемой в процессе принятия решений, частично связана тем, что обладающие этой информацией лица не хотят её раскрывать, но проблема не только в этом. Дело может быть совсем не в мотивах скрытия информации, а в том, что её слишком много, причем большая её часть заведомо не нужна для принятия решения. В частности, это может быть информация о возможных вариантах решения. Их может быть астрономически много, но большая часть из них должна быть отброшена и, чем раньше, тем лучше. Именно здесь очень полезным может оказаться принцип двойственности, привнесенный в линейное программирование и в экономику из функционального анализа – области чистой математики, куда без специальной подготовки не зайти. А для преодоления кризиса в применении математики к экономике это одно из необходимых условий, хотя заведомо недостаточное.

О кризисе и «непризнанном поражении экономико-математического направления» применительно к России много сказано в [Полтерович, 2024a, 2024b]. В цитируемой публикации и прошлых публикациях

того же автора речь идет также о кризисе экономической теории (в мире) и о признании невозможности строить экономическую науку по образцу естественных наук. Такая позиция на сегодняшний день типична не только для представителей либерального крыла экономической науки [Хайек, 2009], но и для многих математиков, пытавшихся построить экономическую теорию по образцу физики Ньютона. Жесткая и справедливая критика этой позиции представлена в [Зиновьев, 2008], суть её в том, что подход был выбран принципиально неверным, неверно понят подход Ньютона – мысленный эксперимент, его соотношение с практикой. Не очень добрую службу сыграла и экономическая теория с её идеологическим подтекстом и табу. Надо признать, позиция А.А. Зиновьева заведомо покажется неадекватной всем, кто знакомился с его творчеством, начиная с антиутопии [Зиновьев, 1976], а не с [Зиновьев, 1972] и других классических работ по логике в разных областях науки и по теории логического вывода.

Не оставлял надежды на превращение экономической науки в точную науку (в смысле science) до конца жизни и Л.В. Канторович (далее – ЭЛВЭ, как он сам предлагал себя называть). О сохранении такой надежды свидетельствуют его последнее интервью, опубликованное под названием «Смотреть на правду открытыми глазами», а также надиктованный им в апреле 1986 года доклад «Мой путь в науке» для выступления на заседании Московского математического общества [Канторович, 1986]. Эти и многие другие документы опубликованы в вышедшем под редакцией В.Л. Канторовича, С.С. Кутателадзе и Я.И. Фета (далее – ККФ) двухтомнике [ККФ, 2002, 2004]. Ссылки на такие документы даны далее с указанием томов и страниц, ссылки на другие источники – в обычном порядке.

## 2. Интересы в математических моделях экономики

Интересы экономических агентов, будь то физические или юридические лица, в математических моделях могут описываться с использованием поверхностей безразличия, скалярных или векторных функций, векторных полей или, наконец, полей многогранников [Вершик, Черняков, 1983а, 1983б]. Именно этот (последний) вариант наилучшим образом подходит для демонстрации возможностей, обозначенных выше (во введении). К тому же он хорошо согласуется со схемой, предлагаемой в [Канторович, 1986] для описания экономических задач, решаемых предлагаемыми им методами. Показать универсальность подхода с представлением интересов в виде поля многогранников можно на достаточно простом примере обмена двумя условными ресурсами между двумя агентами. Схему с большим числом агентов и ресурсов на плоскости изобразить трудно, при этом достаточно легко показать, как те же принципы распространяются на общий случай, где число агентов и ресурсов произвольно.

### Простейшая конструкция

На рисунке 1 представлена очень простая схема обмена ресурсами, допускающая интерпретацию и в терминах линейного программирования, и в терминах наличия конфликтов интересов у обоих участников обмена. Важно лишь то, что обмен описывается правилами обычной арифметики или бухгалтерии – если где-то прибыло, то где-то ровно столько же убыло.

Синий треугольник и красный отрезок можно трактовать либо как супердифференциалы вогнутых кусочно-линейных или кусочно-гладких функций. Векторы  $\Delta x$  и  $\Delta y = -\Delta x$  обеспечивают направление возможного обмена, «выгодного» обеим сторонам в том смысле, что скалярные произведения  $\Delta x$  на векторы  $\theta$ ,  $\theta'$  и  $\theta''$  строго положительны, как и скалярные произведения  $\Delta y$  на  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ . При небольшом сдвиге в этом направлении в линейном случае векторы  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  и  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  не изменятся, а в гладком изменятся мало, то есть все скалярные произведения останутся положительными.

Интерпретация этого факта может иметь разные варианты, при этом совсем не обязательно рассматривать случай  $2 \times 2$ , когда участников обмена только 2, как и ресурсов. Столь простой вариант имеет одно важное достоинство – его можно изобразить в виде рисунка, почти не искажая пропорции. В остальном он проигрывает не только в убедительности, но и в возможности показать некоторые не совсем очевидные эффекты, а потому формальное описание в терминах двойственных переменных, когда они определяются неоднозначно, убедительнее при произвольном числе всех видов переменных, как это сделано в следующем подразделе.

Если говорить о содержательном понимании рисунка, то наборы векторов  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  и  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  можно интерпретировать не только в терминах двойственных переменных, но и в терминах относительной значимости переменных  $x$  и  $y$  для каждой из сторон обмена. В этом случае векторы  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  и  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  желательно нормировать, как это делается в моделях ОЭР, где нормируются цены, а желательные направления определяются как нормали к поверхностям безразличия. Но для нас это сейчас не особенно

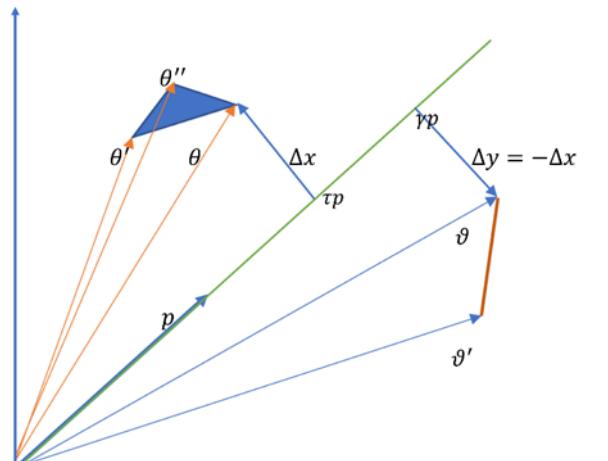


Рисунок 1. Синий треугольник и красный отрезок дают схематическое описание интересов двух разных сторон

важно. Кроме того, в качестве агентов могут выступать не физические или юридические лица, а, например, сельскохозяйственные культуры. Взаимовыгодный обмен посевными площадями в этом случае будет означать увеличение производства тех и других культур. Интересы физических лиц могут не осознанно афишироваться. Но, получив предложение в виде направлений обмена  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , лица, чьи интересы скрыты за показателями  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  и  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  должны либо сразу отказать и дать обоснование для отказа, либо согласиться на обмен в каком-то объеме. Обоснование отказа должно сопровождаться демонстрацией новых пропорций обмена. Остается определиться с тем, кто формирует предложения.

В относительно недалеком прошлом в качестве демиурга, формулирующего предложение, теоретически мог выступать плановый орган. Сегодня это должен делать робот, действуя согласно формальному протоколу. Такие протоколы для решения задач связанных с обменом информацией и продажей информации существуют см. [Babaioff, Kleinberg, Leme, 2012, Smolin, 2019], а также [Неволин, 2023]. Это значит, что совместимый со стимулами механизм не только может быть создан теоретически, он может быть реально создан в виде компьютерной программы. Действующие образцы под конкретные задачи уже есть, например [Неволин, Козырев, 2014]. В рамках той же идейной парадигмы можно рассмотреть многомерную конструкцию, где число обмениваемых переменных равно  $l$ , а число участников обмена –  $m$ . Более того, совсем не обязательно, чтобы все участники обменивались всеми продуктами.

### Многомерные варианты

В рамках той же идейной парадигмы можно рассмотреть многомерную конструкцию, где число обмениваемых переменных равно  $l$ , а число участников обмена –  $m$ . Как и раньше возможны совершенно разные интерпретации переменных, термин «ресурсы» чисто уловный. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_l) \in \mathbb{R}_+^l$  – ресурсы, используемые всеми сторонами в каком-то производстве, достаточно хорошо описываемом в виде задачи линейного программирования (ЛП). Иначе говоря, помимо ограничений по этим ресурсам, есть и другие ограничения, которые ему не очень хочется демонстрировать публично, как все свои цели. У каждого агента  $i = 1, \dots, m$  вектор потребления  $x^i = (x_1^i, \dots, x_j^i, \dots, x_l^i) \in \mathbb{R}_+^l$  и вектор  $\theta^i = (\theta_1^i, \dots, \theta_j^i, \dots, \theta_l^i) \in \mathbb{R}_+^l$  – известны ему самому двойственные переменные. Значение целевой функции задачи ЛП можно переписать как функцию от  $x^i$ , обозначим ее  $f_i(x^i)$ . Она уже не будет линейной в силу наличия других ограничений. Малое изменение вектора  $x^i$  обозначим как  $\Delta x^i$ . Тогда  $\theta^i \cdot \Delta x^i = \Delta f_i(x^i)$  – уравнение вариации плана. Оно выполняется, если решение задачи ЛП устойчиво и остается устойчивым при небольшом изменении  $\Delta x$ . Вектор  $\theta$  известен тому, кто решает задачу ЛП, как и другие ограничения, но раскрывать все ограничения и возможности нет смысла, как правило, это несет бизнесу вред, поскольку ставит конкурентов и партнеров в более выгодное положение. То же самое можно сказать и об отношениях бизнеса с государственными органами. Так было в СССР, так оно есть и сегодня. Но это не значит, что корректировка планов невозможна. Можно запрашивать не ограничения и реальные цели, включая имеющиеся конфликты интересов, а лишь значения  $\theta^i$ , а потом предлагать корректировки планов. В общем случае, как на рисунке 1 набор интересов не определяется однозначно. В случае, когда речь идет о задачах ЛП, такая неоднозначность соответствует случаю, когда количество активных ограничений по обмениваемым ресурсом, больше числа ресурсов, тогда надо говорить не о векторе  $\theta^i$ , а о многограннике  $\Theta_i$ , вершины которого – двойственные переменные при небольших вариациях плана. В принципе ничего необычного в этом нет. Если корректировки в виде обмена идут последовательно, то такая неоднозначность появится. Но причины могут быть и другими, например, какие-то ограничения считали очевидными и не учли.

Формально направляющий вектор луча  $p$  и нужные проекции  $\tau_i$  и  $\gamma p$  находятся из решения задачи

$$\min_{\tau_i \in R_+, \theta^i \in \Theta_i, p \in S_+^l} \left[ \sum_{i=1}^{ml} (\theta^i - \tau_i p)^2 \right].$$

Если луч, определяемый вектором  $p$ , имеет пересечение со всеми множествами  $\Theta_i$ , то есть  $\tau_i p \in \Theta_i$ , то возможности взаимовыгодного обмена нет. Если это не так, то выгодный обмен возможен. Если при этом учитывались неафишируемые интересы, то обмен будет с учетом этих интересов. Но он будет!

Если за каждой из задач ЛП стоит некоторый агент, а вычислительную операцию производит робот, то получается совместимый со стимулами механизм (протокол). Легко увидеть, что, сообщая правдиво свои  $\theta$  и  $\vartheta$ , агенты имеют шанс улучшить свое положение. Если кто-то из них дает искаженную информацию, можно упустить этот шанс. После того, как обмен в найденных пропорциях приведет к неустойчивому решению, протокол надо чуточку поправить, решаемая задача квадратичного программирования несколько усложняется. Двойственные оценки определяются неоднозначно, а потому вместо вектора  $\theta$  надо рассматривать выпуклую комбинацию сначала двух, потом трех и так далее. В конечное число шагов достигается оптимальное по Парето решение (точка на границе Парето).

Наконец, необходимо отметить, что совсем необязательно, чтобы во всех обменах всеми продуктами участвовали все  $m$  экономических агентов. Для каждого агента  $i$  может быть свое множество ресурсов или продуктов  $J_i \subset L = (1, \dots, l)$ , которыми он готов обмениваться. Это значит всего лишь то, что множества  $\Theta_i$  с самого начала должны будут включать в себя подпространства с координатами  $L/J_i$ , то есть с теми, которые соответствуют не обмениваемым агентом  $i$  продуктам (ресурсам). Тот же самый

алгоритм или реализуемый роботом протокол продолжает работать. Более того, можно реализовывать его в разных вариантах. Можно искать каждый раз общий луч, соответствующий единому для всех вектору  $r$ , а можно совершать обмены попарно или группами. Все это теоретически возможно, но количество шагов и, соответственно, вычислений не поддается воображению. Реально можно говорить о приближенных вычислениях и об учете специфики задач.

#### **Класс задач, типичных для экономики**

В докладе, надиктованном ЭЛВЭ незадолго перед смертью в самом общем виде описан класс задач, характерных для экономики и решаемых с применением методов, найденных им в 1939 году, а потом развитыми его учениками и последователями. Далее проще просто приводить цитаты.

*Речь идет о классе задач на экстремум, в которых точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области. Такие задачи характерны для экономики. Некоторый экономический процесс характеризуется двумя векторами:  $x \in X$  — результаты процесса и  $y \in Y$  — используемые ресурсы,  $X$  и  $Y$  — некоторые линейные пространства.*

Цитируется по [ЭЛВЭ, 1986, с. 200]

Отличительный признак — «точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области» — важен с вычислительной точки зрения, а также для демонстрации принципа двойственности. В данном случае не менее важна экономическая сторона дела и, прежде всего, связь с интересами лиц, принимающих участие в постановке или решении задачи. Но продолжим цитату.

*Рассматривается множество реализуемых процессов  $T$ . Каждому значению параметра  $t \in T$  отвечает некоторый процесс, характеризуемый его затратами и результатом  $(x_t, y_t)$ . Множество  $\{(x_t, y_t): T\}$  предполагается выпуклым, то есть вместе с каждой парой процессов в него входит и их усреднение. Точка  $(x_0, y_0)$  называется экстремальным состоянием процесса, если пересечение конуса положительных элементов с вершиной в этой точке с множеством  $\{(x_t, y_t): T\}$  пусто. Экономически это означает, что не существует варианта процесса, в котором бы и результаты были больше  $x \geq x_0$ , и затраты меньше  $y \leq y_0$ .*

Цитируется по [ЭЛВЭ, 1986, с. 200]

В цитируемом тексте нет ни слова об интересах лиц, реализующих задачи экономики, и, тем более, о возможных конфликтах интересов, если не у всех из них, то у многих. В этом смысле речь идет о технических производственных задачах, но грань между техникой и экономикой здесь очень тонкая. Если речь идет не о физических величинах, а о целевых показателях, то её практически нет. В представленной выше конструкции при любом  $t \in T$  значения  $x_t, y_t$  — элементы векторных пространств  $X$  и  $Y$ , их компоненты могут быть не только натуральными показателями, но и разного рода показателями эффективности отдельных лиц и целых коллективов. В отношении  $x_t$  это совсем очевидно, в отношении  $y_t$  ситуация чуть сложнее, но вполне исправима, как минимум, частично. Вместо показателя, который хочется снизить, надо рассматривать показатель снижения, то есть на какую величину или на какой процент показатель может быть снижен. Нечто подобное подразумевается в словах, — «пересечение конуса положительных элементов с вершиной в этой точке с множеством  $\{(x_t, y_t): T\}$  пусто». «Конус положительных элементов» здесь определяется векторами, описывающими возрастание  $x$  или снижение  $y$ , то есть речь идет не об умножении  $x_t, y_t$  на положительное число. Тут есть недоговоренность.

Вместе с тем, предлагаемое описание задачи содержит намек на динамику, каждому  $t \in T$  «отвечает некоторый процесс». Это вполне в духе функционального анализа, где функции становятся точками в пространстве функций определенного вида, можно их складывать и усреднять. Получается выпуклое множество, на границе которого находится точка экстремума, а тогда через нее можно провести опорную гиперплоскость и получить двойственные переменные в том или ином смысле.

### **3. Двойственность в теории оптимального планирования и предельные цены**

В теории оптимального планирования, какой она сформировалась в советское время, двойственные переменные — это цены (они же объективно обусловленные оценки), рассчитываемые на основе предельных затрат плановыми органами, причем не только на уровне Госплана, но и на более низких уровнях, «поскольку необходимо учитывать конкретные условия на местах» [ЭЛВЭ, 1986].

#### **3.1. Принцип двойственности в чистой математике и математическом программировании**

Принцип двойственности в математике — рассмотрение в процессе решения задач одновременно пар объектов, связанных определенным образом (сопряженных). Он пронизывает практически всю математику, начиная от алгебраической топологии (гомологии и когомологии) до вычислительной математики, выпуклого анализа и линейного программирования, куда он был привнесен из функционального анализа. Самые близкие для нашей аудитории примеры — прямая и двойственная задачи линейного программирования, сопряженные выпуклые конусы и пространства, о них в основном и пойдет речь дальше, хотя список двойственных объектов, используемых в приложениях математики к экономике,

этим не исчерпывается. В теорию оптимального планирования как математическую теорию, связанную с планированием производственных процессов и не связанную с идеологией, принцип двойственности пришел, как уже говорилось выше, из функционального анализа и геометрии через выпуклый анализ и линейное программирование как набор вычислительных методов для решения определенного класса задач оптимизации. Главный отличительный признак таких задач – «точка экстремума лежит на границе рассматриваемой области» [ККФ, 2002, с 200]. Отсюда следует сразу два очень важных вывода. Во-первых, не работают традиционные методы поиска экстремума путем приравнивания нулю производных максимизируемой или минимизируемой функции. Во-вторых, не надо искать точку экстремума внутри рассматриваемой области, а это позволяет заметно сократить объем вычислений и необходимой для них информации, что в данном случае еще важнее. Ключ к успеху дает принцип двойственности в виде теорем отдельности и разрешающих множителей, несущих нужную для вычислений информацию, а точнее, позволяющих сразу исключить из рассмотрения львиную долю теоретически доступной информации за её ненужность для вычислений.

### **3.2. От разрешающих множителей к предельным ценам**

Связь двойственных переменных с ценами обнаружилась достаточно быстро и не в последнюю очередь благодаря блюстителям чистоты советской идеологии. Все было относительно спокойно пока двойственные переменные (разрешающие множители), позже названных объективно обусловленными оценками, использовались для решения задач оптимального раскroя или оптимальной загрузки станков различного типа и разной производительности. Такие задачи воспринимались га всех уровнях скорее как технические производственные задачи, чем экономические. Начиная с 1939 года такие задачи достаточно успешно (хотя и не без организационных проблем) решались на предприятиях Ленинграда и Ярославля (во время войны), куда был переведен ВИТУ ВМФ<sup>1</sup>. Как в Ленинграде, так и в Ярославле партийные органы достаточно активно содействовали этой работе.

Идеология дала о себе знать при первой же попытке (в 1943 году) распространить те же принципы на более высокий уровень, а именно, на уровень Госплана. Речь шла о повышении эффективности производства на 15%–25% в условиях войны, но идеология или боязнь отказаться от неё оказались сильнее, как минимум, для работников Госплана, которым тогда руководил легендарный впоследствии Н.А. Вознесенский. Свидетельства этих драматических событий можно найти в [ККФ, 2002, 2004], причем речь не только о воспоминаниях, но и о документах, сохранившихся в семейном архиве и предоставленных В.Л. Канторовичем для публикации в двухтомнике об отце. Обвинение в сходстве идей ЭЛВЭ с идеями «фашиста Парето» прозвучало впервые именно тогда и именно в Госплане. Потом это обвинение повторялось наряду с обвинениями в сходстве разрешающих множителей (они же впоследствии – объективно обусловленные оценки) с предельными (маржинальными) ценами. Не секрет, что уточнение «объективно обусловленные» понадобилось именно для защиты от агрессивных блюстителей чистоты тогдашней идеологии, очень быстро увидевших связь между такими оценками и предельными ценами из теории общего экономического равновесия (далее – ОЭР), а точнее, из модели обмена, откуда тянулась нить к теории предельной полезности и критике трудовой теории стоимости.

### **3.2. Исключение ненужной информации на возможно ранней стадии**

Исключение ненужной информации на возможно ранней стадии – один из ключевых методов повышения эффективности вычислений в математическом программировании, включая не только линейное, но и выпуклое, целочисленное и геометрическое программирование. В выпуклом программировании принцип двойственности работает точно так же, как и в линейном, задачи геометрического программирования в принципе сводимы к выпуклым, хотя не всегда это нужно. Самое проблемное поле – задачи целочисленного программирования. В принципе они могут решаться простым перебором, так как количество возможных вариантов конечно. Однако оно может быть запредельно большим.

В известной задаче фанерного треста [ЭЛВЭ, 1939], которая изначально формулировалась как целочисленная, речь шла об оптимальном размещении заданий по раскрою фанеры на 8 станках разного типа и производительности, причем номенклатура деталей составляла всего 5 наименований, а произвести было нужно максимальное число комплектов. Количество возможных вариантов при кажущейся простоте задачи исчисляется миллиардами. В это трудно поверить, как в одой старой сказке королю было трудно оценить сумму, за которую он купил понравившегося ему коня, заплатив горохом всего королевства. В условиях, поставленных хозяином коня, платить надо было только за гвозди в подковах, за первый гвоздь полагалась одна горошина, но каждый следующий оплачивался по цене, вдвое больше, чем предыдущий. В итоге получилось много, точнее, невообразимо много, как это практически всегда бывает в реальных ситуациях с использованием комбинаторики. Задачи такого типа опасны своей обманчивой простотой. Суть сказки в том, как легко может ошибиться человек, считающий, что ему все по силам. Как вариант, то же самое может думать человек, имеющий в своем распоряжении вычислительную технику большой производительности и универсальное программное обеспечение для решения разного рода прикладных задач, например задач линейного программирования.

<sup>1</sup> Военно-инженерный технический университет ВМФ. Там работал Л.В. Канторович

Задачу линейного программирования можно понимать как решение задачи на экстремум (максимум или минимум) линейного функционала при наличии ограничений в виде равенств и неравенств, а можно как точку как крайнюю точку пересечения луча и выпуклого многогранника. В свою очередь, многогранник можно понимать как и как пересечение конечного числа полупространств, и как проекцию симплекса на пространство меньшей размерности. При проектировании часть вершин симплекса окажется внутри многогранника. И (внимание!) если известно, что точка экстремума останется на границе, то найти буде на много порядков проще, чем на исходном симплексе.

К сожалению, этот эффект уменьшения размерности задачи требует многомерного видения (воображения). Но нечто похожее можно показать на примере, когда вместо трехмерной задачи, решаемой на компьютере, можно решить двумерную задачу на листе бумаги. Такой урок в далеком уже 1972 году преподал д.ф.-м.н. Г.Ш. Рубинштейн, работавший тогда в Институте математики СО АН СССР группе физиков из Института ядерной физики СО АН СССР, а попутно своему дипломнику.<sup>1</sup> Физики попросили помочь в создании математической модели для оптимального размещения нового оборудования в одном из помещений. В ответ на эту просьбу Рубинштейн предложил нарисовать контуры агрегатов на бумаге, вырезать и подвигать по нарисованному же полу помещения, сохранив пропорции, а потом рассказал дипломнику про решение задачи о проводах и изоляции, решаемой с применением биллиардных шаров и ремня (рис 2). С точки зрения математики здесь важно только сечение, пропорции между наибольшим сечение биллиардного шара и сечением провода в идеале такие же, как между сечением застёгнутого ремня и изоляционной трубы. И в этом соль.

И дело тут не только в замене цифрового решения аналоговым, которое оказалось проще и эффективнее в конкретном случае, а в том, как происходит сокращение размерности задачи, если понимать её геометрию, то есть переходить от реальной задачи к абстракции, отбрасывая ненужную информацию, а вместе с ней лишние условия. Компьютеры тогда (в 1972) были и активно использовались в институтах СО АН СССР, но тут нужно другое. При решении задач с применением компьютеров эта проблема никуда не уходит.

Своеобразный парадокс заключается в том, что математикам такие задачи, как правило, малоинтересны. Гораздо престижнее заниматься теоретическими изысканиями, не имеющими приложений. На эту тему не так уж мало написано. Есть знаменитое высказывание Гильберта «Математика – это единая симфония бесконечного». А все остальное – не симфония. К третьему курсу мехмата снобизм в крови. А для тех, кто с такими задачами реально сталкивается, ловушка открыта, король из сказки не одинок.

Задача фанерного треста была решена (при отсутствии вычислительной техники) с применением многомерной геометрии, теорем от делимости и принципа двойственности из функционального анализа. Так родилось линейное программирование, но с тех пор многие навыки, связанные с эффективным использованием появившихся еще тогда и потенциально заложенных в нем идей почти утрачены.

Появление все более мощной вычислительной техники и готовых пакетов программ для решения прикладных задач в значительной мере обесценили умения, которыми обладали прежние поколения специалистов. Уже давно нет перфокарты, еще раньше исчезли соревнования по написанию программ, размещаемых на одной перфокарте. Мало кому может прийти в голову, что задачу по размещению зданий по производству проката для всего СССР можно было решать на машине Минск-22. Но это было, а написавший программу для решения этой задачи – Владимир Александрович Булавский – прекратил заниматься численными методами и тем более программированием еще в середине 70-х годов прошлого века. Он и ближайшие коллеги выпустили монографию [Булавский, Звягина, Яковлева, 1977].

#### 4. Цена как «сигнал, обернутый в стимул»

Представление о ценах как сигналах и стимулах в равной мере присуще и теории оптимального планирования в том виде, как она сформировалась к концу 80-х годов, и теории общего экономического равновесия (далее – ОЭР), и либеральному направлению экономической мысли, продолжающим традиции австрийской школы под лозунгом «маржинальной революции». Именно с ней связан слоган “A Price Is a Signal Wrapped up in an Incentive”. Принципиальные различия между этими тремя направлениями экономической мысли заключаются в уровне формализации, и в том, как трактуется происхождение оптимальных, равновесных или маржинальных цен. Теория оптимального планирования отличается от двух других направлений в части, связанной с идеологией, а именно, предполагает возможность построение оптимальных цен путем математических расчетов на основе объективных данных о затратах труда, а также невоспроизводимых или временно дефицитных ресурсов. Две остальные теории различаются между собой в части формализации и применения математики. Теория ОЭР в активно использует математический аппарат и где-то, возможно, заигралась в эту игру. В этом смысле ей противостоит либеральная теория [Хайек, 2009], принципиально отвергающая формализацию как нечто чуждое гуманитарным наукам. При этом обе эти направления экономической мысли привержены идеям свободного рынка и формирования цен как сигналов, посылаемых рынком. И все это в той или иной мере сказка.

<sup>1</sup> Автору данной статьи



Рисунок 2. Одинаковое сечение – ключ к решению

#### 4.1. Теория оптимального планирования для строителей коммунизма

На внеочередном XXI съезде КПСС, созванном в январе 1959 года для утверждения 7-летнего плана, Н.С. Хрущевым было заявлено, что социализм в СССР полностью построен, страна вступает в период развернутого строительства коммунистического общества. Им же тогда была провозглашена знаменитая фраза: «Нынешнее поколение советских людей будет жить при коммунизме». Тогда даже назывался конкретный срок 1980 год, то есть через 20 лет. Говорить об утопичности срока и самой идеи было не очень удобно, но для кардинальных перемен в экономической науке, как тогда казалось, наступил очень благоприятный момент. Президент АН СССР, выступавший на этом съезде с речью о задачах науки, особо остановился на проблемах экономики.

*Мне хотелось бы особенно подчеркнуть важность задач, встающих перед экономической наукой. Нужно прямо сказать, что в этой области знаний наши ученые в долгую перед страной. Решение проблем экономической науки явно отстает от запросов бурно расширяющегося народного хозяйства, от актуальных задач строительства коммунизма. Чтобы решить поставленные перед ней задачи, экономическая наука должна усовершенствовать свои методы, изучать жизнь, стать точной наукой в полном смысле этого слова, широко использовать новейшие средства вычислительной техники, стать проектировщиком в планировании народного хозяйства.*

Стенограмма Т.2. с. 215

Стать точной наукой в полном смысле этого слова экономическая наука не смогла или, если смотреть на вещи открытыми глазами, не захотела. На практике все уперлось в реальные интересы причем отнюдь не высшего руководства, а «едва ли не всех». В кавычки взят фрагмент из последнего интервью Л.В. Канторовича под названием «Смотреть на правду открытыми глазами» в апреле 1986 года (уже в больнице). Оно опубликовано в [ККФ, 2002, с. 76–82]. Полностью фраза выглядит так.

*В свое время Ленин прозорливо заметил, что, если бы геометрические аксиомы задевали интересы людей, то они, наверное, опровергались бы. Наши модели как раз и затронули интересы множества, едва ли не всех. [ККФ, 2002, с. 77].*

В числе тех чьи интересы были задеты, оказались представители разных слоев общества, но, прежде всего, многие или, точнее, почти все экономисты, включая академиков. На общем собрании АН СССР того же 1959 года ЭЛВЭ произнес речь, испугавшую даже тогдашнего академика-секретаря отделения – В.С. Немчинова – одного из лидеров экономико-математического направления в СССР того времени. В своем выступлении ЭЛВЭ высмеял «открытия» представителей отечественной экономической мысли, сравнивая их с гипотетическими открытиями типа «сталевар стале не варит, а плавит, или даже в некотором смысле кипятит» [ККФ, 2004, с. 96], а ожидающие решения «проблемы с поиском величины 2+2 в квадрате. Но возглавляемое тогда Немчиновым отделение подчинялось тогда не Президиуму АН СССР, а идеологическому отделу ЦК КПСС. А потому выступление ЭЛВЭ вызывало очень неоднозначную реакцию со стороны коллег, кого-то оно напугало, а у кого-то вызывало горячее одобрение.

В том же 1959 году под редакцией, с предисловием и послесловием Немчинова выходит книга [Немчинов, 1959], где представлены достижения отечественной (ленинградской) школы оптимального планирования во главе с ЭЛВЭ. В этой книге есть большой раздел, написанный В.В. Новожиловым, где он доказывает отсутствие противоречия между трудовой теории Маркса и ценообразованием на основе предельных издержек. В предисловии Немчинов назвал некоторые идет Новожилова спорными, а в послесловии [Немчинов, 1959, с. 481] высказался об этом подробно, но ни в предисловии, ни в послесловии не высказал критики в адрес ЭЛВЭ. Однако после выступления ЭЛВЭ на общем собрании позиция Немчинова изменилась. Он не только выступил с критикой позиции ЭЛВЭ непосредственно на собрании, но и изменил свое предисловие к самой известной книге ЭЛВЭ об оптимальном использовании ресурсов. Из полностью хвалебного оно превратилось в довольно «кислое», пришлось рассыпать уже готовый набор и набирать все снова (цифровой печати тогда не было).

История этой размолвки важна по той причине, что история всего направления и, возможно, советской экономики могла бы пойти существенно иным путем, если бы не личностный фактор. Противоречия между практикой и идеологией в СССР снимались неоднократно и вознаграждались очень щедро. Противоречие между общенародной или государственной собственностью в теории и хозяйственными отношениями между государственными предприятиями на практике были примирены путем введения понятий хозяйственного ведения и оперативного управления. Награда автору идеи – Сталинская премия. Также Сталинская премия была выдана за основной экономический закон социализма. Считается, что его сформулировал сам Сталин, на самом деле он его оценил и озвучил от своего имени. Это было абсолютно правильное решение. Иначе началась бы затяжная дискуссия с непредсказуемыми последствиями, что и произошло после 1969 года. Был очень жаркие и интересные дискуссии, но реальные результаты достигались через личные обращения к Н.С. Хрущеву, а он не всегда выбирал лучшее. Здесь надо заметить, что при проведении реформ Дэн Сяопин в Китае, им был выдвинут лозунг, – «Никаких

дискуссий!». Об этом и о других деталях реформ довольно подробно (хотя и тенденциозно) рассказано в [Коуз, 2013]. У нас в СССР все происходило диаметрально противоположным образом.

Уже в 1960 году на Первом Всесоюзном научном совещании по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании разгорелась ожесточенная дискуссия между её участниками. Материалы совещания в семи томах изданы и находятся в открытом доступе (в РГБ). Само по себе это очень хорошо, есть что читать тем, у кого хватит терпения. Дьявол, как всегда, в деталях.

Все участники совещания выступали за применение вычислительной техники, а вот с применением математики мнения разошлись в диапазоне от полной поддержки идей ЭЛВЭ до полного отрицания всей математики, кроме арифметики. Последнее означало использование любых ЭВМ лишь в качестве калькуляторов. Принципиальные расхождения были и среди тех, кто по праву считался сторонниками применения математики в экономических исследованиях и планировании. Расхождения касались самого главного – методов расчета цен. Сторонникам цен на основе предельных издержек противостояли не только сторонники цен на основе межотраслевого баланса, среди которых были свои противоречия, но и профессиональные борцы с буржуазным влиянием. Они находили параллели и с маржиналистской теорией, и с идеями Вильфредо Парето. Разумеется, никто не говорил открыто о невидимой руке рынка, но сторонники этой теории тоже были и вносили свой вклад в дискуссию, создавая повод для обвинения в продвижении буржуазных идей под видом математики, делая дискуссию менее ясной.

Если бы тогда работники идеологического фронта получили четкий сигнал вождя – поддерживать наиболее продвинутые подходы, уже опробованные на предприятиях Ленинграда в довоенные и послевоенные годы, то результат мог быть совсем иной. Идеологически подкованные экономисты открывали бы все новые отличия наших методов, *статья* цены *являют* считают на основе предельных издержек, а не на основе предельной полезности, как у них (буржуев). А желающие сделать что-то реально полезное продвигали бы методы, отработанные на ленинградских заводах, по предприятиям страны. Такого вождя не нашлось и получилось так как получилось. Созданную за последующие 20 с лишним лет теорию оптимального планирования сам ЭЛВЭ называл теорией для коммунистического общества. Но коммунизм здесь – мысленный образ, а не реальность. Для социалистического общества теория требовала приспособления, как механика Ньютона для практического применения к реальным задачам нуждалась в долгой и трудной работе инженеров. Она тоже не могла быть получена непосредственно из опыта и не могла быть проверена опытом непосредственно, но допускало опыты приближения к заявленным идеальным условиям типа перемещения биллиардных шаров на столе все более высокого качества.

#### 4.2. Сказка о невидимой руке рынка

В теории общего экономического равновесия принцип двойственности или его призрак присутствует в виде сказки о невидимой руке рынка и равновесных ценах, предельных (маржинальных) для каждого участника. Как вариант вместо невидимой руки рынка можно обсуждать процесс «нащупывания» (*tâtonnement*) по Вальрасу. На практике оба варианта оказываются именно сказкой, причем с очень существенным идеологическим подтекстом, от которого необходимо абстрагироваться. Идеологии в теории равновесия и необходимости избавления от неё посвящена статья [Козырев, 2024]. Здесь же уместно сделать акцент на иных аспектах, прежде всего на информационном и вычислительном. А тут более естественно обратиться к работам Фридриха Августа фон Хайека (далее – Хаек) получившего в 1974 г. нобелевскую премию «За основополагающие работы по теории денег и экономических колебаний и глубокий анализ взаимозависимости экономических, социальных и институциональных явлений».

Последнее произведение Хайека, написанное им в 1988 году по итогам одной дискуссии о социализме, вышло в переводе на русский язык [Хайек, 1992] под бескомпромиссным (далеким от всякой двусмыслинности) названием «Пагубная самонадеянность» и не менее бескомпромиссным подзаголовком «Ошибки социализма». В этой книге идея социализма не подвергается сомнению, а объявляется ошибочной в самой своей сути, хотя и красивой. Одной из причин называется невозможность получить те самые (оптимальные, маржинальные, равновесные) цены иначе как оставляя эту заботу свободному рынку, для которого любое регулирование вредно. В подтверждение этого утверждения есть резон привести несколько цитат из этой работы, где упоминают «сигналы, именуемые ценами».

Термин «сигнал» используется в ней 13 раз. В каких-то случаях это относится непосредственно к ценам. Так, с самого начала появление цен связывается с развитием индивидуальной собственности.

*Решающим моментом можно считать то, что развитие индивидуализированной собственности является необходимым предварительным условием развития торговли и, следовательно, формирования более крупных, основанных на взаимном сотрудничестве структур, а также появления сигналов, которые мы называем ценами.*

Хаек, 1992, С. 13

Еще одно очень показательное высказывание

*Информация, используемая индивидами или организациями для приспособления к неизвестному, может быть только частичной и передается сигналами (т. е. ценами) по длинным цепочкам от индивида к индивиду, причем каждый передает комбинацию потоков абстрактных рыночных сигналов в несколько измененном виде. Тем не менее, с*

помощью этих частичных и фрагментарных сигналов к условиям, которых ни один отдельный человек не в состоянии предвидеть или знать, приспосабливается структура деятельности в целом (пусть даже такое приспособление не бывает вполне совершенным). Вот почему выживает эта структура, а те, кто ее используют, еще и процветают.

Там же С.134

А дальше, идет большой абзац, где возражения вызывает каждое предложение.

Сознательно спланированной замены такому самоупорядочивающемуся процессу приспособления к неизвестному быть не может.

Тут хочется прервать цитирование и возразить. На сегодняшний день процесс пошел совсем не так, как это представлялось либералам в 1988 году (время написания книги). Цены формируются крупными корпорациями с применением техники и сплужения за покупателями. Но продолжим цитату.

По пути приспособления ведет человека не разум, не врожденное "естественное добро", а только горькая необходимость подчиняться неприятным ему правилам, чтобы сохранить себя в борьбе с конкурирующими группами, которые уже начали расширяться благодаря тому, что раньше натолкнулись на эти правила.

И здесь все далеко не так просто. Очень многие личные качества врожденные

Если бы мы целенаправленно строили или сознательно перекраивали структуру человеческой деятельности, нам достаточно было бы просто выяснить у индивидов, зачем они вступили во взаимодействие с той или иной конкретной структурой. Между тем в действительности все новые поколения исследователей из различных областей обнаруживают, что объяснить эти вещи чрезвычайно трудно, и не могут прийти к согласию в вопросе о причинах или вероятных последствиях различных событий. У экономической науки есть курьезная задача – показывать людям, сколь мало на деле знают они о том, что, как им кажется, они умеют создавать.

Там же с.133–134

Тут хочется пожелать «экономической науке» найти себе другое, более полезное занятие.

#### 4.3. От метафор и благих намерений к реализму и прагматизму

Но вернемся к основному вопросу – ценам как сигналам и стимулам в условиях отечественной экономики вчера, сегодня и, возможно, в будущем. В ранее цитируемом интервью ЭЛВЭ говорит о том, что цены будут необходимы даже в совершенном обществе без денег (при коммунизме),

Даже если в коммунистическом обществе не будет денег и хозрасчета, то цены все-таки останутся. Цены нужны будут для того, чтобы знать, как поступить целесообразно, в соответствии с интересами общества, то есть они сохранят информационное значение.

И далее там же.

Итак, понятно, что самого факта создания плана недостаточно, — нужен механизм, который обеспечит возможность и заинтересованность в его осуществлении. Важно создать такую систему стимулирования, чтобы хозяйственник раскрыл и реализовал все свои резервы. Стимулы должны быть не только выгодными, они должны дойти до сознания. Очень важен подбор кадров, активных, предпримчивых. И государственная их поддержка.

Здесь необходимо добавить необходимость добиться выполнения активными и предпримчивыми кадрами своих обязанностей. А для этого уместно сделать небольшое отступление о трех опорах любого государства и, в частности, его экономики. Государство или власть, если брать шире, обеспечивает, как минимум, законность сделок и защиту от бандитов. Согласно Максу Веберу, всякая власть опирается на легитимное насилие, интересы и авторитет, связанные между собой, достаточно сложным образом. Полностью воспроизвести рассуждения [Вебер, 2020, с. 44–47] не представляется возможным, но несколько отдельных высказываний процитировать необходимо. Итак, на старице 44 читаем.

Государство, равно как и политические союзы, исторически ему предшествующие, есть отношение господства людей над людьми, опирающееся на легитимное (то есть считающееся легитимным) насилие как средство. Таким образом, чтобы оно существовало, люди, находящиеся под господством, должны подчиняться авторитету, на который претендуют те, кто теперь господствует. Когда и почему они так поступают? Какие внутренние основания для оправдания господства и какие внешние средства служат ему опорой?

А дальше речь идет о сложном

*В принципе имеется три вида внутренних оправданий, то есть оснований легитимности (начнем с них). Во-первых, это авторитет «вечно вчерашнего»: авторитет нравов, освященных исконной значимостью и привычной ориентацией на их соблюдение, — «традиционное» господство, как его осуществляли патриарх и патrimonиальный князь старого типа.*

Тут сразу напрашивается мысль о том, как создавалась, а потом рушилась мифология, на которой строился авторитет советской власти, и как теперь эта мифология возрождается. Далее следует вызывающий не меньше ассоциаций фрагмент о харизме и личном авторитете вождя.

*Наконец, господство в силу «легальности», в силу веры в обязательность легального уставновления (Satzung) и деловой «компетентности», обоснованной рационально созданными правилами ...*

Вебера во всем этом тексте интересует именно харизма, остальное – контекст. Об интересах он говорит вскользь и только в самом конце довольно длинного абзаца (более страницы). Ниже фрагмент.

*Понятно, что в действительности подчинение обуславливают чрезвычайно грубые мотивы страха и надежды — страха перед местью магических сил или властителя, надежды на поступороннее или посюстороннее вознаграждение — и вместе с тем самые разнообразные интересы.*

Надо признать, что интересы здесь понимаются несколько шире, чем у Хайека. Впрочем, Вебер интересен не только этим. В свое время он написал несколько эссе о России, Александр Донде (Кустарев) перевел их с немецкого, сокращенные варианты представлены в [Вебер, 2020]. Там и про слабости российского капитализма есть что почитать, хотя написано давно.

### 5. Эпилог.

Завершая тему о ценах и двойственности хочется еще раз вернуться к центральному вопросу о возможности построения системы оптимальных цен и перспективах использования идейного наследия ЭЛВЭ в интересах страны. Повод для этого дают, в частности, проводимые фондом «Кристалл роста» мероприятия<sup>1</sup> и монография [Галушка, Ниязметов, Окулов, 2021], получившая всероссийскую известность не в последнюю очередь благодаря составу авторов. С темой настоящей статьи эти события связаны не только упоминанием имени ЭЛВЭ. Упоминание его имени и популяризация его идей на публичных мероприятиях не может не радовать его учеников, она вселяет надежду, что допущенные в прошлом ошибки можно частично исправить. А упомянутая монография без всяких натяжек интересна. Тем не менее, трактовка в ней событий, повлекших снижение темпов роста экономики СССР, и ошибок, допущенных руководством страны, представляется несколько легковесной. Авторы монографии сознательно не упоминали авторов некоторых документов, чтобы не давать оценок действиям отдельных личностей, а давать их лишь самим поступкам и их результатам. Такой подход, вероятно, оправдан в конкретном контексте, но отнюдь не гарантирует от повторения прошлых ошибок. В чем-то он повторяет историю «коттепели», когда жертвами культа личности оказались и те, на кого писали доносы, и те, кто их писал из самых лучших побуждений или, возможно, ради освобождения жилплощади в коммуналке.

В контексте обсуждения проблем планирования, затрагиваемых в настоящей статье, роль конкретных личностей и мотивов их решений, напротив, очень важна, а потому необходимо уточнить некоторые обстоятельства того периода. В статье [Воробьев, 2021] приведены конкретные цифры, послужившие основанием для изменения строительной программы 1953 года. Они были приведены в записке Берия, на которую дана ссылка. В частности, из неё следует, что для реализации ряда проектов необходимо было, как минимум, вдвое увеличить число заключенных, привлекаемых для выполнения работ, а это – новые аресты. Они могли быть проведены, например, путем вторичных посадок лиц, уже отсидевших свое по тому же делу. Такая практика существовала, но Берия не хотел её продолжать. Был ли он так уж неправ? Из бесед с Молотовым, собранных в [Чуев, 2019] вырисовывается картина всеобщей усталости от напряжения предшествующих лет. Молотов обращается к этой теме дважды, один раз в связи с усталостью Сталина, другой – с усталостью товарищей по партии и, что не менее важно, народа.

Много подчас неожиданных фактов можно узнать из работы [Колесников, 2014], где опубликованы достаточны откровенные интервью с Е.Г. Ясиным – одним из героев катастрофы «святых девяностых» (в том числе для Ясина), которого Колесников называет интеллектуалом. Сам Ясин их таковыми и считал, хотя термин не его. Но речь не о том. В одном из интервью Ясин фактически называет авторов доносов, послуживших причиной или (возможно) лишь катализатором репрессий среди статистиков. Он пересказывает давние беседы со своим бывшим научным руководителем – едва ли не самым главным противником ЭЛВЭ – А.Я. Боярским. В рассказах Ясина его учитель предстает умным и очень неординарным человеком, который делает добрые дела, «замаливая старые грехи». Впрочем, это не мешало

<sup>1</sup> [https://vk.com/video-212627977\\_456239161](https://vk.com/video-212627977_456239161)

ему делать ЭЛВЭ гадости, разумеется, чисто по убеждению как марксисту, отстаивающему чистоту теории. Например, он предложил сотрудникам ЭЛВЭ решить задачу ЛП, где одно из ограничений не было активным. Содержательная интерпретация задачи была скрыта. Естественным образом, соответствующий избыточный ресурс получил оценку ноль. Потом Боярский рассказывал на разных трибунах, что «труд» получил нулевую цену от учеников ЭЛВЭ. В частности, эта провокация озвучивалась на совещании 1994 года и получило широкий резонанс. Тем удивительнее повествование Ясина о двух событиях, изменивших его мировоззрение, бывшее до того марксистским. Одно из них – знакомство с идеями ЭЛВЭ, второе – события в ЧССР 1968 года. Второе понятно, но первое?!

Обращение к документам советской эпохи и глубинным интервью с реальными участниками переломных событий в судьбе научного направления и страны в целом заставляет смотреть на эти события и давать им оценки, часто не совпадающие с современными шаблонами, а порой ломающие их. Если говорить конкретно об экономико-математическом направлении, то решающие ошибки были совершены, как ни странно это звучит, в период с 1956 по 1964 год или раньше в 1943 году, когда в Госплане работали выдающиеся (без преувеличения) личности, а инициатива применения уже проверенных на ленинградских и ярославских заводах методов исходила от руководства ВИТУ ВМФ, что-то им помешало найти общий язык. Потом, как было принято после 1956 года, все свалили на Сталина.

В конце пятидесятых годов желанием применять вычислительную технику и математические методы в экономике буквально заболели многие, если не все. Но уже на всесоюзном совещании 1960 года ясно просматривается раскол между сторонниками оптимальных методов и цен на основе двойственности, с одной стороны, и сторонниками цен на основе межотраслевого баланса, с другой стороны. А среди них, в свою очередь, свои противоречия. Принципиальная проблема здесь заключалась в том, что в балансе любые продукты представлялись в агрегированном виде, агрегация осуществлялась в стоимостном выражении. Для этого использовались цены, но цены же предполагалось рассчитываться. Здесь достаточно ясно проглядывает зацикленность. Об этом ЭЛВЭ разговаривал в том числе с Василием Леонтьевым, которые приезжал в Москву и тогда и позже. Внятного ответа ЭЛВЭ не получил и от него, а в восьмидесятых тон задавали идеологи свободного рынка, кто-то осторожно, кто-то без всяких недоговорок, таким был Ясин. Из теории ЭЛВЭ он вынес идею предельных цен, но скорее в духе Хайека.

Возможно, именно сейчас, когда либеральные идеи терпят практически полное фиаско, есть новый шанс воспользоваться сложными в применении, но продуктивными идеями и методами, вызвавшие когда-то ожесточенное сопротивление «едва ли не всех» [ККФ, 2002, с.77]. Тут важно не упрощать.

## Литература

1. Булавский В.А. (1973) Один специальный алгоритм квадратичного программирования. - В кн.: Оптимизация. Вып. 5(22), Новосибирск, 1973, - . 23–36.
2. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования (специальные задачи), М.: Наука, 1977. - 368 с.
3. Вебер М. (2020) Политика как призвание и профессия / М. Вебер; [пер. с нем. и вступит. ст. А. Ф. Филиппова]. — М.: РИПОЛ классик, 2020. — 292 с. — (Librarium). IS BN 978- 5-386-10496-2
4. Вебер М. (2007) Вебер М. О России: Избранное / Перевод А. Куста рева. - М.: «Российская политическая энциклопедия» (РОССПЭН), 2007. - 159 с
5. Вершик А. М., Черняков А.Г. (1982а) Критические точки полей выпуклых многогранников и оптимум по Парето-Смейлу // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 3. – С. 342–345.
6. Вершик А. М., Черняков А.Г. (1982б) Поля выпуклых многогранников и оптимум по Парето-Смейлу. // Оптимизация: Сб. статей. Новосибирск, 1982. Вып. 28 (45): Проблемы выпуклого анализа и теории экстремальных задач, 1982. – С. 112–145.
7. Воробьева Е.Е. (2021) Трансформация лагерной системы МВД СССР в соответствии с Постановлением Совета Министров СССР «Об изменении строительной программы 1953 года» // Исторический журнал: научные исследования. – 2021. – № 1. DOI: 10.7256/2454-0609.2021.1.34874 URL: [https://nbpublish.com/library\\_read\\_article.php?id=34874](https://nbpublish.com/library_read_article.php?id=34874)
8. Галушка А.С., Ниязметов А.К., Окулов М.О. (2021) Кристалл роста к русскому экономическому чуду. — М., 2021. — 360 с., илл.
9. Демьянов В.Ф. Васильев Л.В. (1981) Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. – 384 с.
10. Зиновьев А.А. (2008) На пути к сверхобществу. М.: Издательство АСТ» 2008, 449с.
11. Зиновьев А.А. (1972) Логическая Физика, М.: Наука, 1972. – 194с.
12. Зиновьев А.А. (1976) Зияющие высоты. Издательство L'Age d'Homme. 1976. – 436с.
13. Канторович Л.В. (1939) Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ. 1939. – 68 с.
14. Канторович Л.В. (1986) Мой путь в науке. Успехи математических наук, 1987, [том 42, выпуск 2\(254\), страницы 183–213](#)
15. Канторович В.Л., Кутателадзе С.С., Фет Я.И. Леонид Витальевич Канторович человек и учений. Новосибирск: Издательство СО РАН, Филиал «Гео», 2002. — Т. 1. — 544 с., ил. 48 с. ISBN 5-7692-0641-1.
16. Козырев А. Н. (2024) Принцип двойственности в математической теории общего равновесия // Цифровая экономика № 4(30), 2024 – с. 5–13. DOI: [10.34706/DE-2024-04-01](https://doi.org/10.34706/DE-2024-04-01)

17. Козырев А. Н. (2025а) Принцип двойственности и вычисления в математических моделях экономики // Цифровая экономика № 3(33), 2025 – с. 5–16. DOI: 10.34706/DE-2025-03-01
18. Козырев А. Н. (2025б) Параллели: Леонид Канторович и Джон фон Нейман // Цифровая экономика № 2(32), 2025 – с. 5–25. DOI: 10.34706/DE-2025-02-01
19. Колесников А. В. (2014) Диалоги с Евгением Ясиным. Новое литературное обозрение. 2014. – 240с. ISBN 978-5-4448-0161-1
20. Коуз Р. (2013) Как Китай стал капиталистическим «Новое издательство» 2013 — (Библиотека свободы) ISBN 978-5-98379-204-3
21. Неволин И.В., (2023) Перспективы развития модуля CRIS для передачи технологий // Цифровая экономика № 3(24), 2023 – с. 19–22. DOI: 10.34706/DE2023-03-03.
22. Немчинов В.С. (1959) Применение математики в экономических исследованиях. Под ред. [и с послесл.] акад. В. С. Немчинова. - Москва: Соцзгиз, 1959. – 495с.
23. Полтерович В.М., (2024а), Математическая экономика в эпоху социализма и переход к рынку (часть I) // Проблемы прогнозирования. 2024. № 5 (206). С. 6–19. DOI: 10.47711/0868-6351-206-6-19.
24. Полтерович В.М., (2024б), Математическая экономика в эпоху социализма и переход к рынку (часть II) // Проблемы прогнозирования. 2024. № 6 (207). С. 6–15. DOI: 10.47711/0868-6351-207-6-15.
25. Хайек Ф.А. (1992) Пагубная самонадеянность. Ошибки социализма. — Пер. с англ. — М.: Изд-во „Новости“ при участии изд-ва „Cattallaxy“, 1992. — 304 с.
26. Хайек Ф.А. (2009) Судьбы либерализма в XX веке / Фридрих фон Хайек ; пер. с англ. Б. Пинскера под ред. Т. Даниловой и А. Куряева. — М., Челябинск: ИРИСЭН, Мысль, Социум, 2009. 337 с. (Серия: «История») ISBN 978-5-91066-028-5 (ИРИСЭН) ISBN 978-5-244-01113-5 (Мысль) ISBN 978-5-91066-027-8 (Социум)
27. Чуев Ф. И. (2019) 140 бесед с Молотовым. Второй после Сталина / Ф. И. Чуев — «Алисторус», 2019 — (Великие вспоминают) ISBN 978-5-907149-23-6
28. Babaioff. M., Kleinberg, R. and Leme, R. Paes (2012): “Optimal Mechanisms for Selling Information,” in Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce, EC '12, pp. 92–109.
29. Nevolin I., Kozyrev A. (2014) Developing CRIS Module for Technology // Procedia Computer Science, Rome, 13–15 мая 2014 года. – Rome, 2014. – P. 158–162. – DOI 10.1016/j.procs.2014.06.026.
30. Smolin, A. (2019) Disclosure and Pricing of Attributes, Munich Personal RePEc Archive. Online at <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/91583/> MPRA

#### References in Cyrillics

1. Bulavskij V.A. (1973) Odin special'nyj algoritm kvadratichnogo programmirovaniya. - V kn.: Optimizaciya. Vy'p. 5(22), Novosibirsk, 1973. – 23–36.
2. Bulavskij V.A., Zvyagina R.A., Yakovleva M.A. Chislenny'e metody' linejnogo programmirovaniya (special'ny'e zadachi), M.: Nauka, 1977. - 368 s.
3. Veber M. (2020) Politika kak prizvanie i professiya / M. Veber; [per. s nem. i vstupit. st. A. F. Filippova]. — M.: RIPOL klassik, 2020. — 292 s. — (Librarium). IS BN 978- 5-386-10496-2 Veber M. (2007)
4. Veber M. O Rossii: Izbrannoe / Perevod A. Kusta reva. - M.: «Rossijskaya politicheskaya e'nciklopediya» (ROSSPE'N), 2007. - 159 s
5. Vershik A. M., Chernyakov A.G. (1982a) Kriticheskie tochki polej vy'pukly'x mnogogrannikov i optimum po Pareto-Smejlu // Doklady AN SSSR. – 1982. – T. 266, № 3. – S. 342–345.
6. Vershik A. M., Chernyakov A.G. (1982b) Polya vy'pukly'x mnogogrannikov i optimum po Pareto-Smejlu. // Optimizaciya: Sb. statej. Novosibirsk, 1982. Vy'p. 28 (45): Problemy' vy'puklogo analiza i teorii e'kstremal'ny'x zadach, 1982. – S. 112–145.
7. Vorob'eva E.E. — Transformaciya lagernoj sistemy' MVD SSSR v sootvetstvii s Postanovleniem Sova Ministrov SSSR «Ob izmenenii stroitel'noj programmy' 1953 goda» // Istoricheskij zhurnal: nauchny'e issledovaniya. – 2021. – № 1. DOI: 10.7256/2454-0609.2021.1.34874 URL: [https://nbpubl.com/library\\_read\\_article.php?id=34874](https://nbpubl.com/library_read_article.php?id=34874)
8. Galushka A.S., Niyazmetov A.K., Okulov M.O. (2021) Kristall rosta k russkomu e'konomicheskому chudu. — M., 2021. — 360 s., ill.
9. Dem'yanov V.F. Vasil'ev L.V. (1981) Nedifferenciuemaya optimizaciya. M.: Nauka, 1981. – 384 s.
10. Zinov'ev A.A. (2008) Na puti k sverxobshhestvu. M.: Izdatel'stvo AST» 2008, 449s.
11. Zinov'ev A.A. (1972) Logicheskaya Fizika, M.: Nauka, 1972. – 194s.
12. Zinov'ev A.A. (1976) Ziyayushchie vy'soty'. Izdatel'stvo LAge dHomme. 1976. – 436s.
13. Kantorovich L.V. (1939) Matematicheskie metody' organizacii i planirovaniya proizvodstva. L.: Izd-vo LGU. 1939. – 68 s.
14. Kantorovich L.V. (1986) Moj put' v nauke. Uspeni matematicheskix nauk, 1987, tom 42, vy'pusk 2(254), stranicy 183–213
15. Kantorovich V.L., Kutateladze S.S., Fet Ya.I. Leonid Vital'evich Kantorovich chelovek i ucheny'j. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, Filial "Geo", 2002. — T. 1. — 544 s., il. 48 s. ISBN 5-7692-0641-1.

16. Kozyrev A. N. (2024) Princip dvojstvennosti v matematicheskoy teorii obshhego ravnovesiya // Cifrovaya ekonomika № 4(30), 2024 – s. 5–13. DOI: 10.34706/DE-2024-04-01
17. Kozyrev A. N. (2025a) Princip dvojstvennosti i vychisleniya v matematicheskix modelyax ekonomiki // Cifrovaya ekonomika № 3(33), 2025 – s. 5–16. DOI: 10.34706/DE-2025-03-01
18. Kozyrev A. N. (2025b) Parallel: Leonid Kantorovich i Dzhon fon Nejman // Cifrovaya ekonomika № 2(32), 2025 – s. 5–25. DOI: 10.34706/DE-2025-02-01
19. Kolesnikov A. V. (2014) Dialogi s Evgeniem Yasiny'm. Novoe literaturnoe obozrenie. 2014. – 240s. ISBN 978-5-4448-0161-1
20. Kouz R. (2013) Kak Kitaj stal kapitalisticheskim «Novoe izdatel'stvo» 2013 — (Biblioteka svobody) ISBN 978-5-98379-204-3
21. Nevolin I.V., (2023) Perspektivnye razvitiya modulya CRIS dlya peredachi tekhnologij // Cifro-vaya ekonomika № 3(24), 2023 – s. 19–22. DOI: 10.34706/DE2023-03-03.
22. Nemchinov V.S. (1959) Primenenie matematiki v ekonomicheskix issledovaniyax. Pod red. [i s poslesl.] akad. V. S. Nemchinova. - Moskva: Socze'kgiz, 1959. – 495s.
23. Polterovich V.M., (2024a), Matematicheskaya ekonomika v epoxu socializma i perexod k ry'niku (chast' I) // Problemy prognozirovaniya. 2024. № 5 (206). S. 6–19. DOI: 10.47711/0868-6351-206-6-19.
24. Polterovich V.M., (2024b), Matematicheskaya ekonomika v epoxu socializma i perexod k ry'niku (chast' II) // Problemy prognozirovaniya. 2024. № 6 (207). S. 6–15. DOI: 10.47711/0868-6351-207-6-15.
25. Xajek F.A. (1992) Pagubnaya samonadeyannost'. Oshibki socializma. — Per. s angl. — M.: Izd-vo „Novosti pri uchastii izd-va „Cattalaxy, 1992. — 304 s.
26. Xajek F.A. (2009) Sud'by liberalizma v XX veke / Fridrix fon Xajek ; per. s angl. B. Pinskera pod red. T. Danilovoj i A. Kuryaeva. — M., Chelyabinsk: IRISE'N, My'sl', Socium, 2009. 337 s. (Seriya: «Istoriya») ISBN 978-5-91066-028-5 (IRISE'N) ISBN 978-5-244-01113-5 (My'sl') ISBN 978-5-91066-027-8 (Socium)
27. Chuev F. I. 140 besed s Molotovy'm. Vtoroj posle Stalina / F. I. Chuev — «Alistorus», 2019 — (Velikie vspominalyut) ISBN 978-5-907149-23-6

#### Ключевые слова

двойственность, квазидифференциал, критическая точка, многообразие, равновесие

Козырев Анатолий Николаевич, к.ф.-м.н., д.э.н  
Центральный экономико-математический институт РАН  
ORCID 0000-0003-3879-5745,  
[kozyrevan@yandex.ru](mailto:kozyrevan@yandex.ru)

Anatoly Kozyrev, The principle of duality and computation in mathematical models of economics

#### Keywords

duality, quasidifferential, critical point, manifold, equilibrium.

DOI: 10.34706/DE-2025-04-01

JEL classification: C65-Разнообразные математические инструменты; C71 Кооперативные игры

#### Abstract

The possibilities of optimizing planned solutions are shown, achievable through a combination of mathematical techniques of non-smooth analysis and game theory. The thesis on the need to distinguish incompleteness of information from the presence of randomness in the construction of mathematical and economic models and managerial decision-making is consistently carried out. The combination of the principle of duality, introduced into optimal planning from functional analysis, and the principle of incentive compatibility from the theory of economic mechanisms makes it possible to combine the role of prices as a signal and as an incentive, and significantly weaken the requirements for completeness of information when solving a wide class of optimization problems. If the incompleteness of information is caused not by its fatal absence as such, but by organizational reasons and the unwillingness of economic agents to disclose information about their interests and opportunities, then economic mechanisms compatible with incentives should be sought, rather than introducing random variables into models. Combined with the development of modern information technologies, this opens the way to overcoming the crisis in the application of economic and mathematical methods in the modern economy.