2. ОБЗОРЫ

УДК: 330.4, 519.8, 004.94

2.1. Приложения тропической математики в экономике и теории игр

Козырев А. Н., ЦЭМИ РАН, г. Москва, Россия

Показаны возможности применения тропической (идемпотентной) математики ы решении экономических задач, где традиционные математические методы не работают или работают плохо. Большое внимание уделено работам, где применение тропической математики не сводится к ускорению вычислительных процедур, а касается самой постановки задачи, её содержательного смысла. Таких работ, к сожалению, очень мало, хотя переход к цифровой экономике и экономике дачных, казалось бы, дает повод для применения тропических методов, поскольку цифровые продукты обладают подходящими свойствами.

1. Введение

Главным мотивом, способствующим написанию этого обзора, было желание разобраться в современном состоянии исследований по теме, заявленной в заголовке статьи. Разумеется, были и другие причины, одна из них – стремление привлечь внимание наиболее продвинутой части нашей аудитории к математическим инструментам нового образца, ждущим своего применения в цифровой экономике. Не последнюю роль сыграла и ностальгия по настоящей математике в экономике, откуда она уходит.

Принцип двойственности в математике и неиспользованные возможности применения математики в экономике – постоянные темы нашего журнала. На этот раз обе они раскрывается путем обзора достижений тропической (идемпотентной) математики в области, где она применяется, по существу, исходной задачи, а не в качестве своего рода «допинга» в вычислительных методах, где идемпотентная математика уже давно нашла реальные применения. Предстоит поговорить и о реальных проблемах, сопутствующих развитию данного направления. При этом практически совсем не затрагиваются такие области как построение и обучение нейронных сетей, хотя здесь достижения тропической математики достаточно велики, причем именно с ними изначально связано появление прилагательного «тропическая», постепенно заменившего менее благозвучное – «идемпотентная».

1.1. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика

В основе идемпотентной математики лежит замена обычных арифметических операций (сложения и умножения) новым набором базовых операций. Сложение заменяется операциями максимум или минимум, а умножение может быть заменено обычным сложением или остаться обычным умножение. При этом числовые поля (поле вещественных и комплексных чисел) заменяются идемпотентными полукольцами и полуполями. Полукольцо получается, например, в том случае, если рассматриваются операции только над целыми числами, операция обратная умножению в этом случае отсутствует.

Прилагательное «тропическая» прилепилось к данной области математики относительно недавно, но практически вытеснило классическое прилагательное «идемпотентная». Термин «тропические полукольца» появился в информатике и теории алгоритмов для обозначения дискретной версии алгебры со сложением вместо умножения и операции максимум или минимум вместо сложения. Дискретные полукольца этого типа были названы «тропическими» в честь бразильского специалиста по информатике и математике Имре Саймона, в знак признания его пионерской деятельности в данной области, см. (Литвинов, 2005). Затем это термин «тропический» стал применяться и к полуполям с теми же операциями.

Основную парадигму идемпотентной математики (Литвинов, 2005) выражает *идемпотентный принцип соответствия.* Этот принцип тесно связан со знаменитым принципом соответствия Нильса Бора для квантовой теории (отсюда термин «деквантование»). Оказывается, между рядом важных, интересных и полезных конструкций и результатов обычной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полуполями и полукольцами существует эвристическое соответствие. А это означает появление огромного поля исследований для профессиональных математиков, сопоставимого со всей математикой над полями вещественных и комплексных чисел.

Цитируемая выше и далее статья (Литвинов, 2005), представляемая как обзор, «практически не содержит строгих формулировок теорем и их доказательств, по словам её автора она является лишь кратким введением в деквантование Маслова, идемпотентную и тропическую математику». Список цитируемой в ней литературы не претендует на полноту даже на дату его публикации. За дополнительными ссылками автор обзора отсылает к более раним обзорам и электронному архиву http://arXiv.org , что вполне логично. Такая рекомендация с благодарностью принимается. Однако надо заметить, что с мировоззренческой точки зрения, то есть для понимания места идемпотентной математики в науках эта статья – своего рода откровение, а потому к Деквантованию Маслова мы еще вернемся.

1.2. Идемпотентное сложение в экономике

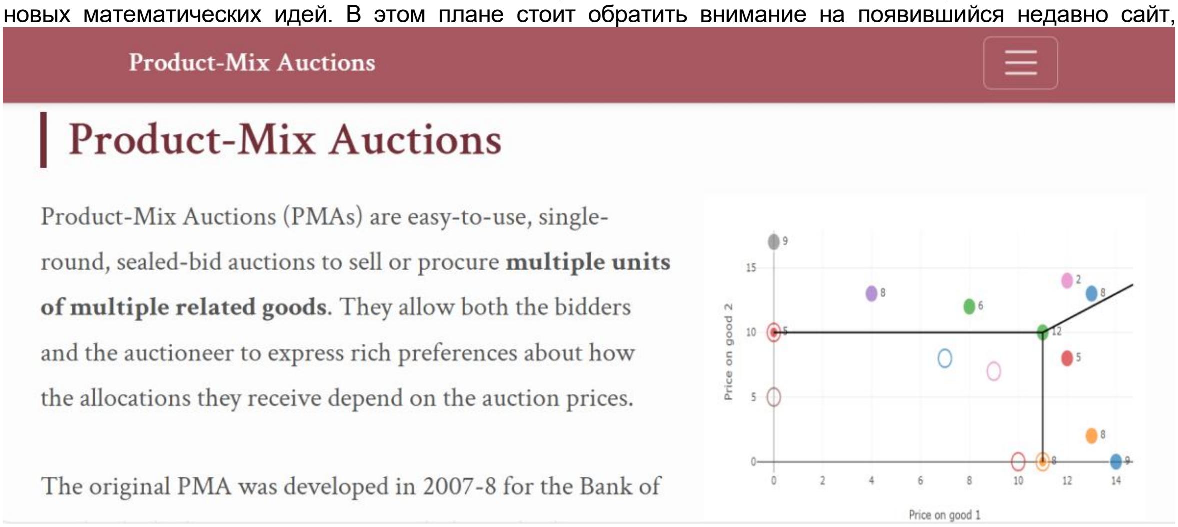
Парадоксальным образом практически все достижения в области применения идемпотентной математики в экономике не связаны явным образом с особенностями цифровой экономики, хотя цифровые продукты – идеальный пример для демонстрации правил идемпотентной алгебры и арифметики, где сложение подчиняется правилу $1 + 1 = 1$, а вычитание вообще не определено со всеми вытекающими отсюда последствиями. Помимо цифровых продуктов такими или близкими свойствами обладают изобретения, откуда происходит поговорка, – не надо изобретать деревянный велосипед». Тут надо сделать оговорку. Акцентировать внимание надо не на прилагательном «деревянный», а на бессмысленности заново изобретать то, что уже изобретено. Этим свойством до известной степени обладают знания или идеи, если понимать эти слова не в строгом математическом смысле, а на бытовом уровне, где они часто уподобляются свету свечи или лампы[1]. Но именно для цифровых продуктов идемпотентность сложения может пониматься буквально, поскольку тут возможно точное совпадение продуктов – бит в бит, а вычитание не может быть определено.

В экономической теории отсутствие вычитания для такого рода продуктов трактуется как неконкурентность в потреблении, а именно: «Потребление продукта одним из экономических агентов не мешает его потреблению другими». По уровню глубины понимания такая трактовка соответствует примерно арифметике мифического племени Нимбу-Юмбу, где были в ходу числа «один», «два» и «много».

Без точной формализации, то есть без перевода на язык математики неконкурентность в потреблении – слишком расплывчатое понятие в том смысле, что способов формализации известно несколько и далеко не все они удачные, причем в основном по причине неумения использовать принцип двойственности. Чаще всего неконкурентность в потреблении трактуется как потребление всеми членами группы (коллективное благо) или всеми членами общества (публичное благо) на одном уровне. Более разумный подход заключается в том, что продукт, именуемый «знание» или «технология» (Макаров, 1973), используется всеми участниками экономической системы (как потребителями) на уровне не выше, чем достигнутый хоть кем-то из них как поставщиков. Такой подход вполне примерим к программному обеспечению, в частности, при формировании цен на программы (Козырев, 1989a, 1989b). В докладе на общем собрании АН СССР, опубликованном в виде статьи (Макаров, 2003) вопрос ставится шире, о чем можно поговорить отдельно. Но сегодня основные применения идемпотентной математики в экономике связаны отнюдь не со специфическими свойствами знаний, идей, цифровых продуктов, а с моделированием спроса на дискретные продукты и организацию аукционов с ассортиментом продуктов. На этих применениях в основном и сосредоточимся в дальнейшем. Также методы на основе идемпотентной математики широко применяются в управлении и вычислениях, но безотносительно к свойствам знаний.

1.3. Источники

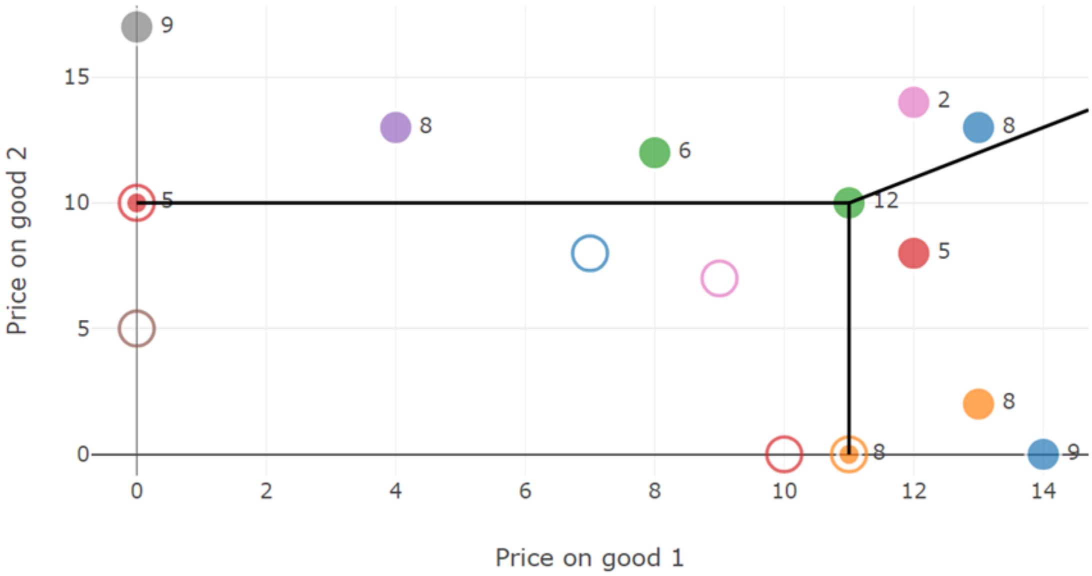
Среди источников, используемых при подготовке настоящего обзора по нескольким причинам особое место занимают работы Элизабет Болдуин (Elizabeht Baldwin) и Пола Клемперера (Paul Klemperer). Во-первых, им удалось применить идеи тропической математики как на практике (Klemperer, 2008), так и в экономической теории (Baldwin, Klemperer et al, 2014, 2019, 2021, 2024a, 2024b), причем и там, и там с успехом, о практике сказано в (Klemperer, 2008). Еще одна, возможно, не менее важная причина состоит в том, что они стараются донести свои идеи и результаты до экономистов, готовых учиться применению новых математических идей. В этом плане стоит обратить внимание на появившийся недавно сайт,



[1] Фраза, приписываемая Томасу Джефферсону: «Тот, кто получает идею от меня, пользуется ею, не обедняя меня; подобно тому, как получивший свет от моей лампы не погружает меня во тьму».

посвященный Product-Mix аукционам http://pma.nuff.ox.ac.uk/, то есть аукционам для продаж продуктов в ассортименте. На этом сайте представлены новые материалы по теме, включая научные публикации, методические материалы и даже компьютерные программы.

На картинке ниже отражена основная суть вклада, внесенного Полом Клемперером в теорию и практику ассортиментных аукционов. О ней стоит поговорить подробнее. Но для начала не лишне заметить, что тропическая прямая определяемая уравнением $ax + by = c$ и условием неотрицательности, определяется тремя равенствами $ax = c$, $by = c$ и $ax = by$. Этим условиям соответствует фигура ниже.



В целом на рисунке изображена ситуация, когда на аукционе одновременно продается 2 продукта. Тропическая прямая разделяет неотрицательный ортант на три части. Прямоугольник ограничивает область, где адекватных запросов со стороны покупателей нет. Участники аукциона, жаждущие получить что-то по таким низким ценам, не получат ничего. Луч, выходящий из правого верхнего угла, разделяет заявки на покупку, удовлетворяющие условиям продажи первого и второго продукта, Одна из заявок (номер 12) удовлетворяет тем и другим условиям, но на пределе.

Разумеется, пример с двумя продуктами в некотором смысле игрушечный, но по тому же принципу Банком Англии в 2007 году был проведен аукцион по раздаче кредитов на астрономическую сумму в сто миллиардов фунтов стерлингов. Принимались заявки на кредиты с надежным обеспечение и с менее надежным. Потом была проведена та самая тропическая прямая, которая разделила заемщиков на тех, кто получил кредит по низкой ставке (надежное обеспечение), по высокой ставке (не очень надежное обеспечение) и тех, кто не получил ничего, поскольку хотел слишком много.

В методическом обеспечении этого аукциона самое активное участие принимал Пол Клемперер, а чуть позже опубликовал очень интересный материал (Klemperer, 2008), где изложены не только методические наработки, но и передана полная драматизма атмосфера события. Впрочем, некоторые детали конфиденциального характера ему пришлось изъять при публикации. Теоретическое осмысление используемого тогда подхода с применением математики первоначально было изложено в препринте (Baldwin, Klemperer, 2014), первая версия которого появилась в 2012 году, а потом тот же материал, но доработанный в соответствии с правилами (Baldwin, Klemperer, 2019), то есть с потерей не только пяти лет, но и цвета в диаграммах, был опубликован в журнале Эконометрика. Тут сложно удержаться от комментария о сроках и присутствии цвета в диаграммах. В нашем журнале цвет приветствуется, благо, что в цифровом формате это ничего не стоит. Но и при печати (по просьбе клиента) цвет оставляем. А еще надо с благодарностью упомянуть электронный архив http://arXiv.org , поскольку именно там появляются лучшие научные статьи, лишь через несколько лет они выходят в топовых журналах.

Еще один интересный (с точки зрения применений в экономике) зарубежный источник – материалы – Tropical Mathematics and Economics | notes and problems from the HCM summer school May 9–13, 2016 – летней школы имени Хаусдорфа. Это мероприятие интересно не только тематикой, но и составом участников, среди них были цитируемые выше авторы статей по смешанным аукционам и Глеб Кошевой – один из россиян, на статьи которых эти авторы с восхищением ссылались. Там же была представлена работа (Crowell and Tran, 2016) о применении тропической геометрии в теории механизмов.

В последующих работах (Baldwin, Klemperer et al, 2021, 2024a, 2024b) так или иначе обобщаются и усиливаются полученные ранее результаты, то есть прорыв в теории – это, прежде всего препринт 2014, года (Baldwin and Klemperer, 2014), где центральное место занимают принцип двойственности при описании спроса через пространство цен и теорема о равновесии на рынке дискретных продуктов, доказанная с применением тропической геометрии, что оказалось проще, чем это было сделано ранее российскими математиками В. Даниловым и Г. Кошевым без применения тропической математики.

Из отечественных работ в первую очередь отметим упоминавшуюся выше статью Г.Л. Литвинова и совсем свежий обзор (Кривулин, 2025), откуда можно идти по ссылкам на более ранние работы. Примечательно, что в статье Г.Л. Литвинова очень хорошо и наглядно представлена связь между идемпотентной и обычной математикой, а также математики с физикой. В обзоре Н.К. Кривулина основное внимание уделено вкладу ленинградских, а позже Санкт-Петербуржских математиков, к числу которых относятся он сам и его ученики, а также ряд математиков, работавших в ЛОМИ АН СССР весте с Л.В Канторовичем еще до его отъезда в Новосибирск (в 1961), но оставшихся в Ленинграде и там развивавших идеи, уходящие корнями в довоенные и первые послевоенные годы.

Если говорить о применении идей идемпотентности в математической экономике, то нельзя не упомянуть статью (Макаров, 1973). В ней речь идет об идемпотентном межотраслевом балансе, интерпретируемом как «балансе научных разработок» со ссылкой на предшествующую беседу с Л. В. Канторовичем, откуда можно сделать вывод, что у исходной идеи ленинградские корни, уходящие во времена, когда Канторович возглавлял отдел прикладных вычислений ЛОМИ АН СССР (до отъезда в Новосибирск, то есть до 1961 года), а рядом с ним работали Н.Н. Воробьёв, А. А. Корбут и И.В. Романовский, внесшие свой вклад в развитие идемпотентной математики как математической дисциплины. Именно Н.Н. Воробьев развил версию идемпотентной линейной алгебры с приложениями в теории игр и математической экономики, и предвидел многие аспекты будущей расширенной теории. Для обозначения идемпотентных полуколец и идемпотентной математики он использовал термины “экстремальные алгебры” и “экстремальная математика”. К сожалению, как отмечено в (Литвинов, 2005), идеи Н. Н. Воробьева в свое время не получили широкой известности, поэтому его терминология не прижилась и сейчас почти не используется. При этом ссылки на его статьи есть в современных работах по математической экономике с применением тропической математики (Крайнов, Матвеенко, 2006).

Очень забавный факт – Балдуин и Клемперер ссылаются на работу (Matveenko, 2014), доказывая свой приоритет в применении тропической математики непосредственно к экономике. Первая версия их работы 2014 года появилась в 2012 году. О более ранних работах Владимира Матвеенко по экономической тематике, например (Матвеенко, 2012), они, разумеется, не знали, поскольку они публиковались на русском языке. А работы В.И. Данилова по экономическому равновесию они считали чистой математикой, что в целом верно. Тут сложно удержаться от сожаления по поводу все большего расхождения между математикой, которой занимаются российские математики, публикуя свои результаты в основном на английском языке за границей, что по-прежнему поощряется всей нашей системой научного труда.

В отечественной литературе фундаментальный вклад в развитие тропической математики внесли труды представителей московской научной школы под руководством академика В. П. Маслова (работы В. Н. Колокольцова, Г. Л. Литвинова, С. Н. Сергеева, Г. Б. Шпиза и др.), посвященные развитию тропического анализа — математического анализа полумодулей функций со значением в полукольце с идемпотентным сложением. Вопросы алгебраической теории тропических полуколец интенсивно изучались в работах Е. М. Вечтомова и А. Э. Гутермана. В работах С. Л. Блюмина и его коллег язык и методы тропической алгебры успешно применялись для развития алгебраической теории решения задач моделирования и управления технологическими и производственными процессами и системами.

Вслед за работами Н. Н. Воробьева, А. А. Корбута, И. В. Романовского, имевшими большое значение для становления тропической математики как новой области науки, санкт-петербургские математики О. Я. Виро, Д. Ю. Григорьев, И. В. Итенберг, Г. Б. Михалкин и др. сыграли ключевую роль в формировании и развитии тропической геометрии, которая представляет собой раздел алгебраической геометрии, определенной над тропическим полуполем. В экономико-математических работах В. Д. Матвеенко язык и методы тропической математики были впервые использованы для построения и анализа моделей экономической динамики и роста (Кривулин, 2025). Но, если говорить совсем точно, речь идет опять-таки не об экономике, а о математике с использованием экономической лексики. Именно в эту сторону пошла математическая экономика, определив свою задачу как проверку идей экономической теории на непротиворечивость.

Надо отметить, что отличием ленинградской (потом петербуржской) школы состоит, ели не в отсутствии такого снобизма, то присутствует в гораздо меньшей степени. Есть потребность доводить исследование до применения. Эта традиция идет от Эйлера, она была присуща С.Л. Соболеву и Л.В. Канторовичу, которые могли заниматься чистой математикой, но не чурались и приложений. То же присуще и тем, ко продолжает работу в том направлении, которое идет от работ по идемпотентной (тропической) математики середины 60-х, начала 70-х годов, продолжает исследования, начатые Н. Н. Воробьевым, А. А. Корбутом и И. В. Романовским, связано с применением моделей и методов тропической алгебры для решения задач оптимизации и исследования операций. Разработке и исследованию методов решения задач тропической оптимизации посвящен ряд работ, опубликованных за последние два десятилетия Н. К. Кривулиным, И. В. Романовским и их коллегами.

Поскольку в обзоре использованы материалы из разных источников и разные по стилю, обозначения в разных разделах могут различаться, нумерация рисунков, заимствованных из (Литвинов, 2016), (Crowell and Tran, 2016) (Baldwin, Klemperer, 2014) и (Klemperer, 2008) привязана к разделам

2.Идемпотентная математика и деквантование Маслова

В основе идемпотентной математики лежит замена обычных арифметических операций новым набором базовых операций (такими как максимум или минимум), при этом числовые поля заменяются идемпотентными полукольцами и полуполями.

2.1. Варианты полуполей

Известно четыре варианта идемпотентной математике над полуполями в качестве сложения может рассматриваться либо операция максимума, обозначаемая символом $\overline{\oplus}$, либо операция минимума, обозначаемая как $\underline{\oplus}$. В качестве умножения может рассматриваться обычное умножение или сложение. Если в качестве умножения рассматривается обычное умножение, то элементы полуполя – неотрицательные числа, нулем служит обычный ноль. Если в качестве тропического умножения используется обычное сложение, то элементы полуполя – все вещественные числа. В качестве нуля используется либо $-\infty$, если сложение – операция максимума, либо ∞, если сложение – операция минимума.

Типичные примеры –- так называемые алгебра макс-плюс $\mathbb{R}_{max}$ и алгебра мин-плюс $\mathbb{R}_{min}$. Они определяются достаточно просто. Пусть $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Тогда $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-co\}$ с операциями $\overline{\oplus}$ и $\odot$, где $x\overline{\oplus}y = max\{x,y\}$, $x\odot y = x + y$. Аналогично $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\underline{\oplus}$ и $\odot$, где $x\underline{\oplus}y = min\{x,y\}$. Новое сложение является идемпотентной операцией, т.е. $x\overline{\oplus}x = x$ и $x\underline{\oplus}x = x$ для всех x.

Начиная с классической работы (Kleene, 1956), многие авторы использовали идемпотентные полукольца и матрицы над этими полукольцами для решения ряда прикладных задач дискретной математики и информатики. Современный *идемпотентный анализ* (или *идемпотентное исчисление,* или *идемпотентная математика)* был разработан В. П. Масловым и его сотрудниками в восьмидесятых годах в Москве, см., например, работы (Kolokoltsov and & Maslov, 1997; Литвинов, Маслов, Шпиц, 1998б 1999, 2001). Некоторые предварительные результаты сформулировали Э. Хопф и Г. Шоке, но, как заметил Н.Н. Воробьев, там даже речи не шло о двойственности.

Идемпотентную математику можно рассматривать как результат деквантования традиционной математики над числовыми полями, при котором постоянная Планка *H* стремится к нулю, принимая мнимые значения. Такая точка зрения была представлена Г. Л. Литвиновым и В. П. Масловым в работах (Litvinov and Maslov, 1965, 1996). Иначе говоря, идемпотентная математика является асимптотической версией традиционной математики над полями вещественных и комплексных чисел.

2.2. Идемпотентный принцип соответствия

Основную парадигму идемпотентной математики выражает *идемпотентный принцип соответствия.* Этот принцип тесно связан со знаменитым принципом соответствия Нильса Бора для квантовой теории. Оказывается, что существует эвристическое соответствие между рядом важных, интересных и полезных конструкций и результатов обычной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полуполями и полукольцами (полуполями и полукольцами с идемпотентными сложением).

Систематическое и последовательное использование идемпотентного принципа соответствия приводит к многообразным результатам, часто весьма неожиданным. В результате, наряду с традиционной математикой, возникает ее “теневая” идемпотентная версия. Эта “теневая” версия так же связана с традиционной математикой, как классическая физика с физикой квантовой, см. рис. 2.1.

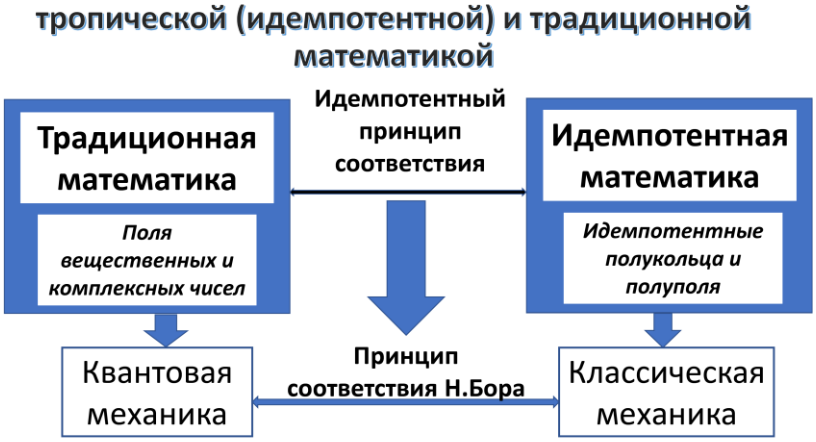


Рис. 2.1. Связь между идемпотентной и традиционной математикой.
Источник – (Литвинов, 2016)

Во многих отношениях идемпотентная математика проще традиционной. Однако переход от традиционных конструкций и результатов к их идемпотентным аналогам часто является нетривиальным.

2.3. Полукольца, полуполя и деквантование

Пусть на множестве S заданы две алгебраические операции: *сложение* $\oplus$ и *умножение* $\odot$. Говорят, что на множестве S задано *полукольцо,* если выполняются следующие условия:

- сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
- сложение $\odot$ коммутативно;
- умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$**:**

$$x\odot(y\oplus z) = (x\odot y)\oplus(x\odot z)$$

и

$$(x\oplus y)\odot z = (x\odot z)\oplus(y\odot z)$$

для любых $x, y, z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $1 \in S$, что $1\odot x = x\odot 1 = x$ для всех $x \in S$. *Нулем* полукольца S называется такой элемент $0 \in S$, что $0 \neq 1$ и $0\oplus x = x$, $0\oplus x = x\oplus 0 = 0$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным полукольцом,* если $x\oplus x = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S с элементами 0 и 1 называется *полуполем,* если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Рассмотрим поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ и полуполе всех неотрицательных вещественных чисел $\mathbf{R}_+$ (относительно обычных операций сложения и умножения). Замена переменных $x \mapsto u = hl\ln x$, $h > 0$, задает отображение

$$\Phi_h\colon \mathbf{R}_+ \to S = \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$$

Перенесем операции сложения и умножения из $\mathbf{R}$ в S с помощью отображения Φ_h, а именно, пусть

$$u\oplus_h v = h\ln exp(u/h) + exp(v/h),$$

$$u\odot v = u + v,\ \ \mathbf{0} = -\infty = \Phi_h(0), \qquad \mathbf{1} = 0 = \Phi_h(1)$$

Таким образом S приобретает структуру полукольца $\mathbf{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbf{R}_+$; см.рис. 2.1.

Несложно проверить, что $u\oplus_h v \to max\{u, v\}$ при $h \to 0$ и что S образует полукольцо относительно сложения $u\oplus v = max\{u, v\}$ и умножения $u\odot v = u = v$, с нулевым элементом ∞ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{max}$ оно *идемпотентно,* так как $u\oplus u = u$ для всех элементов. При этом полукольцо R_{max} является полуполем. Аналогия с процедурой квантования здесь очевидна, параметр h играет роль постоянной Планка, поэтому полуполе $\mathbf{R}_+$ можно рассматривать как “квантовый” объект, а полукольцо $\mathbb{R}_{max}$ может рассматриваться как результат его “деквантования”. Аналогичная процедура для $h < 0$ дает полукольцо $\mathbb{R}_{min} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = min$, $\odot = +$; в этом случае 0=+∞, $\mathbf{1} = 0$. Полукольца $\mathbb{R}_{\boldsymbol{max}}$ и $\mathbf{R}_{min}$ изоморфны. Переход к $\mathbb{R}_{\boldsymbol{max}}$ или $\mathbf{R}_{min}$ называется *деквантованием Маслова.* Понятно, что соответствующий переход от поля комплексных **C** или вещественных **R** чисел к $\mathbb{R}_{max}$ осуществляется при помощи деквантования Маслова и отображения $x \mapsto |x|$. Такой переход также часто называют деквантованием Маслова (Литвинов, 2005). Идемпотентное полукольцо $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \boldsymbol{max}$, $\odot = \boldsymbol{min}$ может быть получено в результате “вторичного деквантования” полей **C**, **R** или полуполя $\mathbb{R}_{max}$. Так называемое *идемпотентное деквантование* является обобщением деквантования Маслова; это переход от полей к идемпотентным полуполям и полукольцам в математических конструкциях и ре идемпотентное деквантование является обобщением деквантования Маслова; это переход от полей к идемпотентным полуполям и полукольцам в математических конструкциях и результатах.

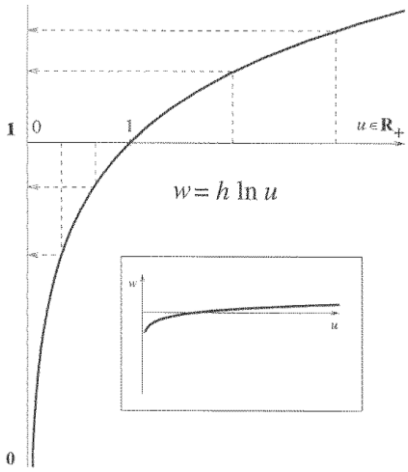


Рисунок 2.2. Переход от $\mathbf{R}_+$ к $\mathbf{R}^{(h)}$.
На вставке: то же для малых *h*.
Источник – (Литвинов, 2016)

2.4. Терминология: тропические полукольца и тропическая математика

Термин “тропические полукольца” появился в информатике и теории алгоритмов для обозначения дискретной версии алгебры $\mathbb{R}_{max}$ или $\mathbb{R}_{min}$ и их подалгебр; дискретные полукольца этого типа были названы “тропическими” Домиником Перрэном в честь бразильского специалиста по информатике и математике Имре Саймона, в знак признания его пионерской деятельности в данной области, см. [Pin, 1998].

В дальнейшем ситуация и терминология изменились. Для большинства современных авторов “тропический” означает “над полуполями $\mathbb{R}_{max}$ или $\mathbb{R}_{min}$, а тропические полукольца – это идемпотентные полуполя $\mathbb{R}_{max}$ и $\mathbb{R}_{min}$ В этом же смысле часто используются термины “макс-плюс” и “мин-плюс” . В настоящее время термин “тропическая математика” обычно означает “математика над полуполями $\mathbb{R}_{max}$ или $\mathbb{R}_{min}$, см., а термины "тропикализация" и "тропификация" (Kirillov A. N. (2001) в точности означают деквантование и квантование в описанном выше смысле. В любом случае, тропическая математика является естественной и очень важной частью идемпотентной математики. Многие известные конструкции и результаты идемпотентной математики были повторены в рамках тропической математики (и особенно в тропической линейной алгебре).

Заметим, что Н.Н. Воробьев в своих статьях развил некоторую версию идемпотентной линейной алгебры (с важными приложениями, в том числе для теории игр и математической экономики). Он предвидел многие аспекты будущей расширенной теории. Для обозначения идемпотентных полуколец и идемпотентной математики он использовал термины “экстремальные алгебры” и “экстремальная математика”. К сожалению, идеи Н. Н. Воробьева в свое время не получили широкой известности, поэтому его терминология не прижилась и сейчас почти не используется.

2.5. Идемпотентная и линейная алгебра

Автором первой известной работы по идемпотентной линейной алгебре считается И. Клини. В его работе (Kleene, 1956) рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений над несколько экзотическим идемпотентным полукольцом всех формальных языков с фиксированным конечным алфавитом. Однако идеи И. Клини оказались весьма общими и универсальными. После этого десятки авторов изучали матрицы с коэффициентами, принадлежащими идемпотентным полукольцам, а также соответствующие приложения к дискретной математике, информатике, языкам программирования, лингвистическим задачам, конечным автоматам, проблемам оптимизации на графах, теории оптимального управления, дискретным системам событий и сетям Петри, стохастическим системам, оценке производительности компьютеров, вычислительным проблемам и т.д. Эти направления хорошо известны и широко представлены в литературе, см., например, (Дудников, Самборский, 1991), (Litvinov and Maslova, 2000), (Litvinov and Maslov (Eds.), 2005), (Воробьёв, 1963, 1967, 1970).

Идемпотентная абстрактная алгебра пока не так хорошо развита, хотя с формальной точки зрения теория решеток, теория упорядоченных групп и полугрупп входят в состав идемпотентной алгебры. Тем не менее, имеется много интересных результатов и приложений, см., например, (Шпиз, 2000).

В частности, идемпотентная версия основной теоремы алгебры сформулирована в (Шпиз, 2000) для радикабельных идемпотентных полуколец (полукольцо A называется *радикабельным,* если уравнение $x^n = a$ имеет решение $x \in A$ для любого $a \in A$ и любого положительного целого n). Доказано, что $\mathbb{R}_{max}$ и другие радикабельные полуполя алгебраически замкнуты в естественном смысле (Шпиз, 2000).

Известно четыре варианта идемпотентной математике над полуполями в качестве сложения может рассматриваться либо операция максимума, обозначаемая символом $\overline{\oplus}$, либо операция минимума, обозначаемая как $\underline{\oplus}$. В качестве умножения может рассматриваться обычное умножение или сложение. Если в качестве умножения рассматривается обычное умножение, то элементы полуполя – неотрицательные числа, нулем служит обычный ноль. Если в качестве тропического умножения используется обычное сложение, то элементы полуполя – все вещественные числа. В качестве нуля используется либо $-\infty$, если сложение – операция максимума, либо ∞, если сложение – операция минимума.

В последние годы особое внимание привлекают к себе вопросы тропической алгебраической геометрии, которые будут рассмотрены ниже.

3. Двойственность в тропической алгебре и геометрии

В этом разделе изложение следует препринту (Crowell and Ttran, 2016) находящемуся в открытом доступе https://arxiv.org/pdf/1606.04880v1. Основное внимание уделяется двойственности, начиная с самых простых примеров. При этом круг тропических алгебр сужается до двух: max-plus и min-plus на $\mathbb{R}$. Алгебра max-plus $(\mathbb{R}, \overline{\oplus}, \odot)$ определяется тропическим сложением $a \overline{\oplus} b := max(a, b)$ и тропическим умножением $a \odot b := a + b$. Алгебра min-plus $(\mathbb{R}, \underline{\oplus}, \odot)$ определяется как $a \underline{\oplus} b := min(a, b)$, $a \odot b := a + b$. Эти алгебры изоморфны через отображение $x \mapsto -x$, поэтому теоремы, справедливые для одной, имеют очевидные аналоги в другой. В качестве условного обозначения также используются обозначения с подчеркиванием, такие как $\underline{\oplus}, \underline{\odot}, \underline{\mathcal{H}}, \ldots$ для обозначения объектов, определенных с помощью арифметики в тропической алгебре с min-plus, и обозначения с заглавной буквы $\overline{\oplus}, \overline{\odot}, \overline{\mathcal{H}}, \ldots$ для обозначения тех же объектов, определенных с помощью арифметики в тропической алгебре max-plus.

3.1. Основы.

Пусть $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – матрица, $x \in \mathbb{R}^m$ – вектор, а $\lambda \in \mathbb{R}$ – скаляр. Как обычно, скалярно-векторное умножение определяется поэлементно $\lambda \odot x \in \mathbb{R}^m$, $(\lambda \odot x)_i = \lambda + x_i$ для $i \in [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Матрично-векторное умножение определяется $L \underline{\odot} x \in \mathbb{R}^m$, $(L \underline{\odot} x)_i = min_{j \in [m]} \{L_{ij} + x_j\}$ для $i \in [m]$. Пара (x, λ) называется парой собственный вектор-собственное значение L, если

$$L \underline{\odot} x = \lambda \underline{\odot} x$$

или явно,

$$\min_{j \in [m]} \{L_{ij} + x_j\} = \lambda + x_i, \qquad i \in [m]$$

Согласно теореме 2.1 из (Cuninghame-Green, 1962), матрица $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ имеет единственное тропическое собственное значение. Таким образом, можно говорить о тропическом собственном значении матрицы L, обозначаемом $\underline{\lambda}(L)$. Собственное тропическое пространство $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ равно

$$\underline{Eig}(L) = \{x \in \mathbb{R}^m : L \underline{\odot} x = \underline{\lambda}(L) \underline{\odot} x\}.$$

Тропическое сложение идемпотентно: $a \oplus a = a$ для $a \in \mathbb{R}$. В частности, здесь нет вычитания. Это отличает тропическую линейную алгебру от ее классического аналога. Например, детерминант A равен её перманенту, который равен

$$\underline{tdet}(L) = \underline{\bigoplus}_{\sigma \in S_m} L_{1\sigma_1} \odot \cdots \odot L_{m\sigma_m} = \min_{\sigma \in S_m} \left(L_{1\sigma_1} + \cdots + L_{m\sigma_m} \right)$$

Однако, поскольку тропические уравнения представляют собой всего лишь набор классических линейных уравнений и неравенств, многие тропические объекты могут быть вычислены с помощью линейного программирования. В статье (Crowell and Tram, 2016) приведены три примера, имеющих отношение к этой математической технике: вычисление тропического детерминанта (определителя), тропического собственного значения и тропического собственного пространства. Они приводятся ниже.

3.2. Тропический детерминант.

Оценка тропического детерминанта означает решение классической задачи о назначении. Представьте, что есть m рабочих мест и m работников, и каждому работнику нужно назначить ровно одну работу. Пусть L_{ij} – плата работнику i за выполнение работы j. Компания хочет найти задание с наименьшими затратами. Таким образом, минимальные затраты равны $\underline{tdet}(L)$.

Хотя существует $m!$ возможных соответствий, чтобы найти оптимальное соответствие, нет необходимости оценивать их все. Классическая задача о назначении, описанная выше, представляет собой линейную программу над многогранником перестановок и может быть эффективно решена с помощью венгерского метода (Kuhn, 1955).

3.3. Тропические собственные значения.

Теорема 3.1 (Cuninghame-Green, 1962). *Матрица $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ имеет единственное собственное значение $\underline{\lambda}(L)$, которое равно минимальному среднему весу всех простых направленных циклов на m вершинах*.

Средний вес цикла – это сумма ребер, деленная на количество ребер в цикле. Хотя простых циклов экспоненциально много, для вычисления $\underline{\lambda}(L)$ нет необходимости проверять их все. Вычисление собственного значения min-plus и max-plus – это линейные программы над многогранником нормализованного цикла, для которых существует эффективное решение.

3.4. Тропическое собственное пространство

Параллельно классической линейной алгебре тропическое собственное пространство матрицы $m \times m$ генерируется не более чем m экстремальными тропическими собственными векторами $v_1, \dots, v_m$, в том смысле, что любой $x \in \underline{Eig}(L)$ может быть записан как

$$x = a_1 \odot v_1 \underline{\oplus} \dots \underline{\oplus} a_m \odot v_m$$

для некоторых $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Как множества, тропические собственные пространства являются политропами (Joswig and Kulas, 2010), названными так потому, что такое множество является одновременно тропическим и обычным многогранником, см. раздел 3.8 ниже. Чтобы найти $\underline{Eig}(L)$, сначала вычитается $\underline{\lambda}(L)$ поэлементно из L и сводится к случаю $\underline{\lambda}(L) = 0$. В этом случае численно может быть найдено значение кратчайшего пути от i до j на $G(L)$. Абстрактно, эти векторы являются векторами-столбцами звезды Клини из L. В следующем определении I обозначает единичную матрицу min-plus с нулями на ее диагонали и $+\infty$ в других местах.

Определение 3.2. Для $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ с $\underline{\lambda}(L) = 0$ звезда Клини из L, обозначаемая $\underline{L}^*$, равна

$$\underline{L}^* = I \underline{\oplus} \left(\underline{\oplus}_{i=1}^{m} L^{\underline{\odot} i} \right)$$

Матрица $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ называется *звездой Клини*, если $\underline{M}^* = M$.

Теорема 3.3. Для $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ пусть $c_1, \dots, c_m$ – векторы столбцов $(L - \underline{\lambda}(L))^*$. Тогда $\{c_1, \dots, c_m\}$ – множество тропических образующих $\underline{Eig}(L)$.

По этой причине звезды Клини играют фундаментальную роль в теории тропического спектра и, таким образом, были исследованы многими математиками. Они также известны как сильные транзитивные замыкания (Butkovič, 2012, §1.6.2.1) или матрица расстояний (Murota,2003). Звезды Клини и, следовательно, тропические генераторы тропического собственного пространства могут быть вычислены путем умножения и сложения тропических матриц.

3.5. Тропический проективный тор.

Во многих экономических задачах важны только относительные оценки или цены, а не их абсолютные значения. В тропических терминах это означает, что оценки и цены являются точками в тропическом проективном торе $\mathbb{TP}^{m-1}$. Это должно быть наше окружающее пространство, когда мы говорим о геометрии в задачах проектирования механизмов.

Множество $S \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто при тропическом умножении на скаляр, если для всех $a \in \mathbb{R}$ мы имеем $a \odot x = (a + x_1, \dots, a + x_m) \in S$ всякий раз, когда $x \in S$. Примеры включают образ матрицы $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\underline{Im}(L) = \left\{ y \in \mathbb{R}: L \underline{\odot} x, x \in \mathbb{R}^m \right\},$$

или его тропическое собственное пространство $\underline{Eig}(L)$. Достаточно рассмотреть такое множество по модулю тропического умножения на скаляр. Определим отношение эквивалентности ~ на $\mathbb{R}^m$ с помощью

$$(1) \qquad x \sim y \Leftrightarrow x = ay \qquad a \in \mathbb{R}^m$$

Пространство $\mathbb{R}^m$ по модулю ~ называется тропическим проективным тором или тропическим аффинным пространством $\mathbb{TP}^{m-1}$. Явно, это $\mathbb{R}^m$ по модулю прямой, охватываемой единичным вектором

$$\mathbb{TP}^{m-1} \equiv \mathbb{R}^m/\mathbb{R} \cdot (1, \cdots, 1).$$

Обратите внимание, что тропическое умножение на скаляр не зависит от max или min, поэтому в одном и том же пространстве $\mathbb{TP}^{m-1}$ можно говорить как о max-plus, так и о min-plus геометрических объектах, таких как тропические многогранники и размещение тропических гиперплоскостей.

Мы следуем соглашению в (Joswig and Kulas, 2010; Maclagan and Sturmfels, 2015) и идентифицируем $\mathbb{TP}^{m-1}$ с $\mathbb{R}^{m-1}$, нормализуя первую координату с помощью следующего гомеоморфизма.

$$(2) \quad \mathbb{TP}^{m-1} \mapsto \mathbb{R}^{m-1}, [(x_1, \cdots, x_m)] \longmapsto (x_2 - x_1, \cdots, x_m - x_1)$$

В частности, мы используем это отображение для визуализации множеств в $\mathbb{TP}^2$. Конечно, можно было бы выбрать другие нормализации, такие как установка i-й координаты равной нулю для некоторого другого $i \in [m]$, или потребовать, чтобы сумма координат была постоянной.

Часто проверка того, замкнуто ли множество $S \subseteq \mathbb{R}^m$ при тропическом умножении на скаляр, является простой. В таких случаях будем писать $S \subseteq \mathbb{TP}^{m-1}$ без явного уведомления. В частности, будем записывать элемент $x \in \mathbb{TP}^{m-1}$ в качестве вектора в $\mathbb{R}^m$.

3.6. Тропические многогранники и гиперплоскости.

Центральными объектами в тропической выпуклой геометрии являются тропические многогранники и тропические гиперплоскости. Тропический многогранник содержит все тропические отрезки прямой (тропическую выпуклую оболочку) между любыми двумя его точками. Для каждого тропического многогранника существует порождающих его конечный минимальный набор точек. Тропический двойственный многогранник можно представить в виде пересечений тропических гиперплоскостей. Давайте уточним.

Определение 3.4. Тропический многогранник min-plus, порожденный векторами $\{c_1, \ldots, c_m\} \subset \mathbb{R}^m$, равен

$$\underline{tconv}(c_1, \cdots, c_m) = \{z_1 \underline{\odot}\, c_1 \oplus \cdots \oplus z_m \underline{\odot}\, c_m : z \in \mathbb{R}^m\}$$

Пусть L – матрица, i-й столбец которой равен c_i. Переписывая, получаем

$$\underline{Im}(L) = \underline{tconv}(c_1, \cdots, c_m)$$

Сразу видно, что $\underline{tconv}(c_1, \ldots, c_m) \subset \mathbb{TP}^{m-1}$, и что для констант $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$,

$$\underline{tconv}(a_1 \odot c_1, \cdots, a_m \odot c_m) = \underline{tconv}(c_1, \cdots, c_m)$$

Таким образом, будем работать в $\mathbb{TP}^{m-1}$, рассматривая как $\{c_1, \ldots, c_m\}$, так и их тропическую выпуклую оболочку как подмножество $\mathbb{TP}^{m-1}$. Обратите внимание, что для конкретного тропического многогранника P матрица L, такая что $\underline{Im}(L) = P$, определена только с точностью до тропических масштабов ее столбцов. Если не указано иное, мы изменим масштаб матрицы L так, чтобы на её диагонали были нули. Это связывает P с единственной матрицей L.

Для остальной части этого раздела задана матрица $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Пусть c_i обозначает ее i-й вектор-столбец. Тропический многогранник $\underline{Im}(L)$ также можно рассматривать в терминах его тропических опорных гиперплоскостей.

Определение 3.5. Для точки $p \in \mathbb{R}^m$, $j \in [m]$, min-plus тропическая гиперплоскость с вершиной p, обозначаемая $\underline{\mathcal{H}}(p)$, представляет собой множество точек $z \in \mathbb{R}^m$, такое, что минимум в тропическом скалярном произведении

$$(3) \quad p^T \underline{\odot}\, z = min\{z_1 + p_1, \cdots, z_m + p_m\}$$

достигается как минимум дважды. Аналогично, тропическая гиперплоскость max-plus с вершиной p, обозначенной $\underline{\mathcal{H}}(p)$, представляет собой набор $z \in \mathbb{R}^m$, такой, что максимум в

$$(4) \quad p^T \overline{\odot}\, z = max\{z_1 + p_1, \cdots, z_m + p_m\}$$

достигается по крайней мере дважды.

В классической линейной алгебре дополнением гиперплоскости является объединение двух открытых полупространств. В тропической линейной алгебре дополнением тропической гиперплоскости в $\mathbb{TP}^{m-1}$ является объединение m открытых секторов.

Определение 3.6. j-й открытый сектор тропической гиперплоскости max-plus с вершиной $-p$, обозначаемый $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{H}}}_j(p)$, является таким множеством точек $z \in \mathbb{R}^m$, что максимум (4) достигается только в точке j. То есть,

$$\overset{\circ}{\overline{\mathcal{H}}}_j(p) := \{z \in \mathbb{TP}^{m-1} : z_j + p_j > z_k + p_k\ \forall k \neq j\}$$

Его замыканием является j-й замкнутый сектор гиперплоскости max-plus с вершиной $-p$,

$$\overline{\mathcal{H}}_j(p) := \{z \in \mathbb{TP}^{m-1} : z_j + p_j \geq z_k + p_k\ \forall k \neq j\}$$

Множество $z \in \mathbb{R}^m$ такое, что максимум (4) достигается в точке j и, возможно, во второй координате.

Для матрицы $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ с нулевой диагональю пусть $L_1..., L_m \in \mathbb{TP}^{m-1}$ – это m строк из L, рассматриваемых как векторы в $\mathbb{TP}^{m-1}$. Для упрощения записи запишите $\overline{\mathcal{L}}_j$ для $\overline{\mathcal{H}}_j(L_j)$, то есть,

$$\overline{\mathcal{L}}_j = \overline{\mathcal{H}}_j(L_j) = \{t \in \mathbb{TP}^{m-1}: L_{jk} + t_k \leq t_j \ \forall k \neq j\}$$

Пишем $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{L}}_j}$ для соответствующего j-го открытого сектора $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{H}}_j}(L_j)$

$$\overset{\circ}{\overline{\mathcal{L}}_j} = \overline{\mathcal{H}}_j(L_j) = \{t \in \mathbb{TP}^{m-1}: L_{jk} + t_k < t_j \ \forall k \neq j\}$$

Его граница $\overline{\mathcal{L}}_j \backslash \overset{\circ}{\overline{\mathcal{L}}_j}$ обозначается $\partial\overline{\mathcal{L}}_j$. При этом граница представляет собой объединение $m-1$ полугиперплоскостей

$$\partial\overline{\mathcal{L}}_j = \bigcup_{k\in[m],k\neq j} \overline{\mathcal{L}}_{jk},$$

где k-й кусочек $\overline{\mathcal{L}}_{jk}$ – это множество

$$\overline{\mathcal{L}}_{jk} = \{t \in \mathbb{TP}^{m-1}: L_{jk} + t_k = t_j, L_{jk'} + t_{k'} < t_j \ \ \forall k' \neq j, k\}$$

Как и прежде, подчеркивание используем для обозначения аналогичной величины в min-plus. Например, $\underline{\mathcal{L}}_j$ – j-й сектор гиперплоскости min-plus с вершиной $-L_j$ в $\mathbb{TP}^{m-1}$, равен

$$\underline{\mathcal{L}}_j = \{t \in \mathbb{TP}^{m-1}: L_{jk} + t_k \geq t_j \ \forall k \neq j\}$$

Определение 3.7 (Расположение тропических гиперплоскостей). Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $L_1..., L_m \in \mathbb{R}^m$ – её векторы строки. Рассмотрим множество тропических гиперплоскостей $\{\underline{\mathcal{H}}(L_i): i \in [m]\}$ в $\mathbb{TP}^{m-1}$. Пересечения их различных секторов разделяют $\mathbb{TP}^{m-1}$ на многогранный комплекс, *называемый расположением тропических гиперплоскостей* $\underline{\mathcal{H}}(L)$.

Определение 3.8 (Доминирующее расположение). Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $L_1..., L_m \in \mathbb{R}^m$ – её векторы строки. Множество замкнутых секторов $\{\overline{\mathcal{L}}_i: i \in [m]\}$ в $\mathbb{TP}^{m-1}$ называется макс-плюс доминирующим расположением L, обозначаемым $\overline{\mathcal{D}}(L)$. Аналогично, $\{\underline{\mathcal{L}}_i: i \in [m]\}$ – это мин-плюс доминирующее расположение L, обозначаемое $\underline{\mathcal{D}}(L)$.

Предложение 3.9 (Maclagan and Sturmfels. 2015). *Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Тропическая гиперплоскость $\underline{\mathcal{H}}(L)$ является многогранным комплексом. Кроме того, объединение ограниченных клеток $\underline{\mathcal{H}}(L)$* равно $\underline{lm}(L)$.

3.7. Ковекторы

Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Каждая гиперплоскость в $\underline{\mathcal{H}}(L)$ разбивает $\mathbb{TP}^{m-1}$ на m секторов. Нумерация секторов соответствует координате, при которой минимум достигается один раз. Для данной точки $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$ мы можем запросить ее положение относительно тропических гиперплоскостей, связанных с L. Эта комбинаторная информация закодирована в ковекторах.

Определение 3.10. Мин-плюс ковектор (или комбинаторный тип) вектора $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$ относительно $\underline{\mathcal{H}}(L)$, обозначаемый $\underline{coVec_L}(p)$, представляет собой матрицу в $\{0,1\}^{m\times m}$ с

$$\underline{coVec_L}(p)_{ki} = 1 \Leftrightarrow p \in \underline{\mathcal{H}}_k(L_i).$$

Можно думать о ковекторе как о матрице смежности двудольного графа (m, m). Он имеет ребро (k, i), если и только если p находится в секторе k гиперплоскости с вершиной в точке $-L_i$, i-й строки L. Ковекторы являются центральным понятием в тропической выпуклой геометрии. Эта идея была выдвинута в (Develin and Sturmfels, 2004) как комбинаторные типы (Jehiel, Moldovanu, and Stacchett,1996) и впоследствии получила дальнейшее развитие (Joswig and Loho, 2016).

Точки в одной и той же открытой клетке $\underline{\mathcal{H}}(L)$ имеют один и тот же ковектор. Таким образом, можно говорить о ковекторе клетки ν из $\underline{\mathcal{H}}(L)$. Обозначим его $\underline{coVec_L}(\nu)$. Назовем $\underline{coVec_L}(\nu)$ обратимым, если для каждого $i \in [m]$ существует некоторое $j \in [m]$ такое, что $\underline{coVec_L}(\nu)_{ij} = 1$. Ниже приведена характеристика ограниченных клеток в расположении тропических гиперплоскостей по их ковекторам.

Лемма 3.11 (Develin and Sturmfels, 2004). Пусть $\nu \subset \mathbb{TP}^{m-1}$ – клетка в $\underline{\mathcal{H}}(L)$. Тогда ν ограничено (как подмножество $\mathbb{TP}^{m-1}$) тогда и только тогда, когда $\underline{coVec_L}(\nu)$ обратима.

3.8. Политропы и тропические собственные пространства.

Определение 3.12. Политроп $P \subset \mathbb{TP}^{m-1}$ – это тропический многогранник, который также является обычным многогранником.

Термин политроп был введен в (Joswig and Kulas, 2010). Существует множество эквивалентных характеристик политропов. Здесь собраны те, которые имеют отношение к экономическим механизмам. Первые три результата являются классическими результатами, см. (Maclagan and Sturmfels, 2015). Последние два утверждения являются характеристиками Мураты, который называет политроп L-выпуклым множеством (Murota, 2003).

Предложение 3.13. Пусть $P \subset \mathbb{TP}^{m-1}$ – непустое множество. Следующие утверждения эквивалентны.

(1) P – политроп.

(2) Существует матрица $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ такая, что $P = \underline{Eig}(M)$.

(3) Существует матрица $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ такая, что

$$P = \{y \in \mathbb{TP}^{m-1}: y_i - y_j \leq M_{ij}\ for\ all\ i,j \in [m]\}.$$

(4) $P = \underline{Im}(M^*)$ для единственной звезды Клини M^*.

(5) P – как мин-плюс тропический многогранник, так и макс-плюс тропический многогранник

(6) P – как минимальное плюс выпуклое множество, так и максимальное плюс выпуклое множество.

Как множество в $\mathbb{TP}^{m-1}$, многогранник P является компактным выпуклым многогранником размерности $k \in \{0,1,\dots,m-1\}$. Назовем P полномерным, если он имеет размерность $m-1$. Политроп размерности $k < m-1$ в $\mathbb{TP}^{m-1}$ получается путем вложения k−мерного политропа в k-мерное подпространство $\mathbb{TP}^{m-1}$, определяемое пересечениями гиперплоскостей вида

$$x_i = x_j$$

для некоторых $i,j \in [m]$. В матричных терминах это означает, что если мы запишем политроп P как $\underline{lm}(L)$, то как множество в $\mathbb{TP}^{m-1}$, точно $k+1$ из его столбцов (или строк) уникальны. Таким образом, часто бывает достаточно рассмотреть теорию для полномерных политропов.

3.9. Двойственность строк-столбцов и минимальные политропы.

Существует тривиальная двойственность между алгеброй min и max, вытекающая из того факта, что для $a,b \in \mathbb{R}$,

$$min\{a,b\} = -max\{-a,-b\}.$$

Это приводит к тривиальной двойственности между пространством строк и столбцов матрицы $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ следующим образом.

Лемма 3.14. Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Отображение $x \mapsto -x$ переводит $\underline{\mathcal{H}}(L)$ в $\overline{\mathcal{H}}(-L^T)$.

Существует более удивительная двойственность строк и столбцов

Теорема 3.15 (Develin and Bernd, 2004). *Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Существует изоморфизм между многогранными комплексами $\underline{Im}(L)$ и $\underline{Im}(L^T)$, полученными путем ограничения кусочно-линейных отображений $z \mapsto y := L\odot(-z)$ и $y \mapsto z := (-z)^T\odot L$* на $\underline{Im}(L)$ и $\underline{Im}(L^T)$, соответственно.

Согласно части (5) предложения 3.13, изоморфизм в теореме 3.15 сводится к тривиальному отображению $y \mapsto -y$, индуцированному отображением $L \mapsto -L^T$ тогда и только тогда, когда L – звезда Клини, или, что эквивалентно, тогда и только тогда, когда $\underline{Im}(L)$ – политроп.

Когда $L = -L^T$, то $\underline{Im}(L)$ не только является макс-плюс и мин-плюс тропическим многогранником, но и имеет одинаковый набор генераторов макс-плюс и мин-плюс. Примером является стандартный минимальный политроп

$$\Delta_{m-1} = conv(0, e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+\cdots+e_m) + \mathbb{R}\cdot(1,\cdots,1),$$

где conv обозначает классическую выпуклую оболочку, а e_i – i-й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^m$, то есть вектор с 1 в i-й координате и нулями в других. Обратите внимание, что для этого политропа его набор макс-плюс тропических образующих, мин-плюс тропических образующих и вершин как обычного многогранника совпадают. В некотором смысле это единственный политроп, обладающий таким свойством. Следующая теорема, по сути, является повторением (Murota. 2003, теорема 7.24). Это ключ к характеристике слабой монотонности при проектировании механизмов, см. раздел 6.1.

Определение 3.16. Многогранник $P \subset \mathbb{TP}^{m-1}$ размерности $k \in \{0,1\dots,m-1\}$ называется минимальгым, если он, как классический многогранник имеет $k+1$ вершин.

Теорема 3.17. Пусть P – полномерный тропический многогранник в $\mathbb{TP}^{m-1}$. Тогда эквивалентны следующие

(1) P – полномерный минимальный многогранник.

(2) P – это как min-plus, так и max-plus полномерный тропический многогранник с одинаковым набором m образующих.

(3) С точностью до перестановок существует единственная матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, такая, что $A = -A^T$, $P = Im(A)$, и как подмножество $\mathbb{TP}^{m-1}$ столбцы A уникальны.

(4) Звезда Клини A^* из P имеет вид

$$A^*_{ij} = p - p + a\left(A^*_{\Delta_{m-1}}\right)_{ij},$$

для некоторого вектора $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$ и некоторого скаляра $a \in \mathbb{R}^m$, где $A^*_{\Delta_{m-1}}$ – звезда Клини из Δ_{m-1}.

(5) С точностью до перестановок существует вектор $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$ и скаляр $a \in \mathbb{R}^m$ такие, что

$$(5)\quad P \equiv p + a\cdot\Delta_{m-1}$$

Доказательство. Предложение 3.13 подразумевает (2) ⇔ (3) и (4) ⇔ (5). Докажем (1) ⇔ (5). Согласно (Murota 2003., теорема 7.24), любой политроп может быть регулярно разложен как объединения меньших политропов. Из этого доказательства, использующего расширение Ловаша (Lova´sz) соответствующих L-выпуклых функций над P, следует, что минимальные политропы являются в точности выпуклой оболочкой максимальных цепей на $\{0,1\}^m$. До перестановки на $[m]$ такая цепочка является лексикографической. Выпуклая оболочка лексикографической цепочки равна Δ_{m-1}. Таким образом, до перестановки, масштабирования и перевода минимальный политроп P равен Δ_{m-1}, по мере необходимости. Теперь докажем (5) ⇔ (2). Предположим, что P задается формулой (5). Тогда проще всего проверить, удовлетворяет ли он (2). И наоборот, предположим (2). Согласно (Murota.2003, теорема 7.24), любая L-выпуклая функция над P также должна быть L-вогнутой. Таким образом, это должна быть классическая гиперплоскость. Таким образом, P имеет уникальное расширение Ловаша, которое подразумевает, что вплоть до масштабирования и трансляции оно должно быть симплексом, поддерживаемым цепочками $\{0,1\}^m$. Поскольку P полномерно, цепочка максимальна, и, таким образом, имеем (5).

3.10. **Пример.** Все вышеприведенные концепции могут быть проиллюстрированы в следующем примере. Пусть $m = 3$, $\delta \in [0,1)$ и $c_1 = (0,-1,-4)$, $c_2 = (0,\delta,0)$, $c_3 = (0,-4,-1)$ –точки в $\mathbb{TP}^2$. Сложив их вместе в виде векторов-столбцов, получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\delta 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть c_1, c_2, c_3 векторы в $\mathbb{TP}^2$ нормированы так, что i-я координата i-го вектора равна нулю, получим новую матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \delta & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $P = Im(L)$. Можно проверить, что $P = Im(A)$. Матрица L – это единственная матрица с нулевой диагональю, связанная с P.

На графе $G(L)$ средние длины двух циклов равны $\frac{1}{2}(1+\delta)$, $\frac{1}{2}(3+\delta)$, и $\frac{3}{2}$. Средние длины циклов трех циклов равны $\frac{1}{3}(\delta + 3 \ + 4)$ и $\frac{1}{3}\delta$. Собственные циклы имеют нулевые средние длины циклов. Таким образом, для любого $\delta \in [0,1)$ мы имеем $\lambda(L) = 0$.

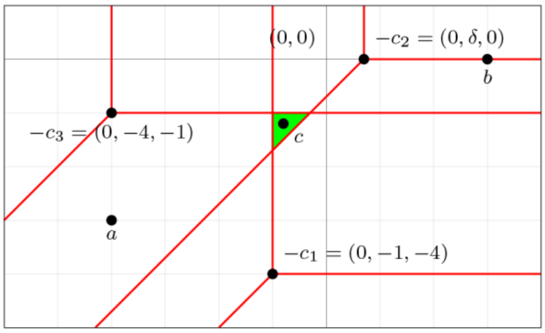
Пусть $\delta \in [0,1)$. Чтобы вычислить звезду Клини в созвездии L, следует заметить, что

$$L^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \odot (1-\delta) & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1+\delta & \delta & 0 \end{pmatrix}, \qquad L^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 0 & -1+\delta & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1+\delta & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

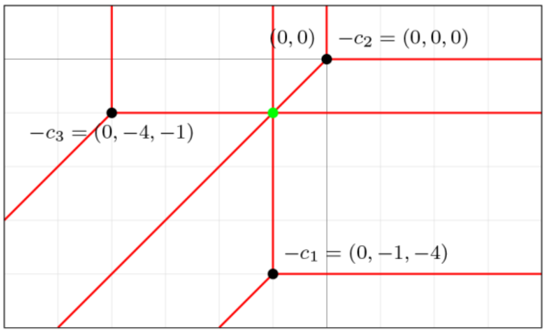
Таким образом, звезда Клини $L^* = L \oplus L^{\odot 2} \oplus L^{\odot 3} = L^{\odot 3}$. В этом случае тропическое собственное пространство $\underline{Eig}(L)$ имеет граневое представление

$$\underline{\mathrm{Eig}}(L) = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x_1 - x_2 \le -1 + \delta, -1 - \delta \le x_1 - x_3 \le -1, -\delta \le x_2 - x_3 \le 0\}.$$

На рисунке 3.1 показано расположение тропической гиперплоскости $\underline{\mathcal{H}}(L^T)$ для $\delta \in (0,1)$ на панели (A) и $\delta = 0$ на панели (B). Это расположение состоит из мин-плюс тропических гиперплоскостей, вершинами которых являются векторы столбцов $-L_1^T$, $-L_2^T$ и L_3^T из L. В первом случае зеленый треугольник посередине – это тропическое собственное пространство $\underline{Eig}(L)$. Во втором случае собственное тропическое пространство $\underline{Eig}(L)$ является зеленой точкой. Тропический многогранник $\underline{Im}(L)$ состоит из ограниченных отрезков прямой от вершин $\underline{Eig}(L)$ до точек c_1, c_2, c_3, помеченных их координатами.



(A) Случай $\delta > 0$.



B) Случай $\delta = 0$. Тропическое собственное пространство сжимается в точку.

Рисунок 3.1. Расположение тропической гиперплоскости $\underline{\mathcal{H}}(L^T)$ для $\delta \in (0,1)$ (слева) и для $\delta = 0$ (справа).
Источник – (Crowell and Tran, 2016)

Ковекторы точек, обозначенных от a до c, задаются следующими матрицами.

$$\underline{coVec}_L(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{coVec}_L(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{coVec}_L(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Важно отметить, что a и b лежат в неограниченных клетках тропической гиперплоскости, поэтому их ковекторы не обратимы, в то время как c лежит в ограниченной клетке, поэтому его ковектор обратим.

4. Геометрическое представление неделимого спроса

4.1. Допущения

У агента есть оценка $u\colon A \to \mathbb{R}$ для конечного набора пакетов $\mathbf{x} \in A \subsetneq \mathbb{Z}^n$. То есть пакеты, сформированные из n различных товаров, которые состоят из неделимых единиц. Каждый из этих товаров может быть доступен в нескольких единицах по линейной цене. (Можно обрабатывать единицы товара по независимой цене, рассматривая их как разные товары.)

Обратите внимание, что пакет может быть отрицательным или со смешанным знаком: отрицательные координаты представляют единицы проданных товаров. Таким образом, модель допускает продавцов с нетривиальными функциями снабжения и более обычных торговцев, а также покупателей. Обратите также внимание, что область A наборов, которые агент считает возможными, может быть любым конечным множеством в $\mathbb{Z}^n$. Таким образом, агент может потребовать несколько единиц каждого товара. (Разные единицы одного и того же товара, конечно, неразличимы для агента.) Более того, A не обязательно должен содержать каждый целочисленный пакет в своей выпуклой оболочке. Также не обязательно A включать каждый пакет, доступный в экономике. В частности, если пакет полностью неприемлем для агента, его просто нет в A. (Это эквивалентно разрешению агенту оценивать некоторые пакеты в “$-\infty$”, и это более удобно.)

Агент обладает квазилинейной полезностью, поэтому максимизирует $u(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ – вектор цены. Оценки не обязательно должны быть положительными или слабо возрастающими, и допускаются отрицательные цены, поэтому модель охватывает как “неудачи”, так и товары.

Позже (в 4.3) модель распространяется на конечный набор агентов: агент j будет иметь оценку u^j на целочисленных пакетах в конечной области A^j. Также в (Baldwin and Klemperer, 2014, 2019) рассматривается конкурентное равновесие между этими агентами при наличии внешнего предложения. Таким образом, структура будет охватывать случай, в котором все трейдеры (включая всех продавцов) явно моделируются как агенты, то есть экономики обмена (для которых внешнее Предложение равно 0).

4.2. Локус цен безразличия (LIP)

Цены, по которым агент безразличен более чем к одному пакету — это цены, по которым востребованный им набор $D_u(\mathbf{p}) := \operatorname{argmax}_{x\in A}\{u(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\}$ содержит несколько пакетов:

Определение 4.1: *Локус цен безразличия* (LIP) равен $\mathcal{L}_u := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : |D_u(\mathbf{p})| > 1\}$.

В математической литературе это множество известно как “тропическая гиперповерхность, смотри, например” (Mikhalkin, 2004) и другие источники, но (Baldwin and Klemperer, 2014, 2019) вводят новую терминологию, чтобы облегчить понимание экономистами.

Поскольку $u(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ квазилинейна (и, следовательно, также непрерывна), LIP содержит только цены, при которых спрос может изменяться в ответ на изменение цены, и представляет собой объединение $(n-1)$-мерных линейных фрагментов, которые мы будем называть гранями. Грани разделяют области однозначности спроса (UDR), в каждой из которых некоторый пакет является единственным востребованным.

На рисунке 4.1(a) показан простой пример LIP. Агент однозначно запрашивает один из пакетов (0,0), (0,1), и (1,0) в соответственно-помеченной двумерной области, таким образом, эти области являются UDR. Агент запрашивает оба пакета (0,0) и (0,1) на отрезке линии $\{(\mathbf{p_1}, 4) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{p_1} \geq 5\}$; это грань, как и два других показанных отрезка линии. Если бы вместо этого пакеты были сформированы из $n = 3$ различных товаров, то грани были бы сформированы из плоских сегментов, разделяющих трехмерные UDR, и так далее в более высоких измерениях. Итак, формально мы определяем следующее:

Определение 4.2: Пусть $u\colon A \to \mathbb{R}$.

1. Область *однозначности спроса (UDR)* в u – это множество всех цен, по которым только данный пакет в A пользуется спросом. То есть он имеет вид $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \{\mathbf{x}\} = D_u(\mathbf{p})\}$ для некоторого $\mathbf{x} \in A$.

2. *Гранью* $\mathcal{L}_u$ является подмножество $F \subseteq \mathcal{L}_u$ такое, что существуют $\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2} \in \boldsymbol{A}$, $\mathbf{x^1} \neq \mathbf{x^2}$, удовлетворяющие $F = \{\boldsymbol{p} \in \mathcal{L}_u : \boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2} \in D_u(\boldsymbol{p})\}$ и $dimF = n - l$. [1]

Таким образом, UDR включают все цены, которых нет в LIP, и для каждой грани есть пара пакетов, которые востребованы по всем её ценам.

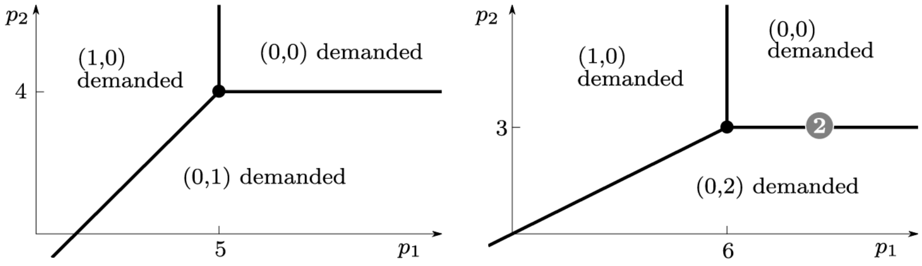
Грани содержат важную экономическую информацию: при любой цене **p** в данной грани F агенту безразличен выбор между пакетами **x** и **x'**, требуемыми в UDR по обе стороны от F. То есть $u(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = u(\mathbf{x}') - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'$, $\forall \mathbf{p} \in F$. Таким образом, $\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ является постоянным для всех $\mathbf{p} \in F$. Следовательно, F является нормалью к вектору, который определяет изменение спроса, **x'-x**, между UDR по обе стороны от F. На рисунке 1(a), опять же, грань $\{(p_1, 4) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \geq 5\}$ содержит цены, при которых спрос может измениться на $(0{,}0) - (0{,}1) = (0, -1)$, какой вектор нормален к этой грани.

[1] Далее всегда используются естественные размерности. Таким образом, размерность множества $F \subseteq \mathbb{R}^n$ является размерностью его аффинной оболочки, то есть размерностью наименьшего линейного подпространства $U \subseteq \mathbb{R}^n$ такого, что $F \subseteq \{\mathrm{c}\} + U$ для некоторого фиксированного вектора **c**. Здесь и по всему тексту применяем к наборам сложение по Минковскому.

Таким образом, геометрия LIP сообщает нам направления изменения спроса между парами цен. Чтобы узнать, насколько сильно меняется спрос в любом направлении, указанном LIP, нам нужна еще одна информация – *веса граней*:

Определение 4.3: Пусть **x**, **x'** – пакеты, востребованные в UDR по обе стороны от грани F. Вес F, $w_u(F)$, является наибольшим общим делителем элементов **x'–x**.

Теперь $\frac{1}{w_u(F)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$является примитивным целочисленным вектором, то есть наибольший общий делитель его элементов равен 1. Итак, поскольку товары неделимы, это наименьшее возможное изменение пакета в направлении $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$. Таким образом, вес грани, $w_u(F)$ – это целое число, на которое умножается наименьшее возможное изменение пакета при пересечении грани F.



(a) $u(0,0) = 0$, $u(1,0) = 5$, $u(0,1) = 4$. (b) $u(0,0) = 0$, $u(1,0) = 6$, $u(0,1) = 1$, $u(0,2) = 6$.

Рисунок 4.1. Примеры граней $\mathcal{L}_u$ для двух значений u. Грани – это отрезки линии; помеченная грань (b) имеет вес 2. Пакет, востребованный в каждом UDR, помечен.

Источник – (Baldwin and Klemperer, 2014)

На рисунке 1(b) показан LIP с гранью весом 2, а именно $\{(p_1, 3): \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq 6\}$, по которому спрос изменяется от (0,0) до (0,2), то есть удвоенное наименьше изменение в этом направлении.

Вектор $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ направлен от UDR, у которого запрашивается **x'**, к UDR, у которого запрашивается **x**, в направлении, противоположном изменению цены. Но поскольку F является $(n-1)$-мерным, существует единственный примитивный целочисленный вектор, нормальный к F и указывающий в этом направлении. Итак, мы доказали:

Предложение 4.4: 1. *Если* **x**, **x'** одинаково требуются по обе стороны грани F, то $p \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ является постоянным для всех $\mathbf{p} \in F$. 2. Изменение спроса при изменении цены между ЕПД по обе стороны от F равно $w_u(F)$, умноженному на примитивный целочисленный вектор, номинальный для F, и указывает в направлении, противоположном изменению цены.

То есть LIP и его вектор весов, w_u, взятые вместе, содержат всю информацию о том, как меняется спрос между UDR.

4.2.1. Ценовой комплекс

Чтобы развить полную теорему эквивалентности (теорема 4.14), нужно понять, как u определяет “ценовой комплекс” из “клеток”; эти клетки обобщают грани.

Определение 4.5: Пусть $u: A \to \mathbb{R}$.

1. Клетка ценового комплекса из и является непустым множеством $C \subseteq \mathbb{R}^n$ таким, что существуют $\mathbf{x^1}, \ldots, \mathbf{x^k} \in A$ с $k \geq 1$, удовлетворяющие $C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n: \boldsymbol{x^1}, \ldots, \boldsymbol{x^k} \in D_u(\mathbf{p})\}$.

2. Ценовой комплекс – это набор всех ячеек ценового комплекса.

3. Клетки LIP – это клетки ценового комплекса, содержащиеся в LIP.

По непрерывности, замыкание UDR – клетка ценового комплекса: она включает в себя все точки, в которых востребован конкретный набор. Любая другая клетка ценового комплекса определяется спросом на два или более наборов, и так же является клеткой LIP.

Таким образом, на рисунке 1(a) клетки ценового комплекса представляют собой замыкания трех UDR; трех граней; а также точку (5,4), где агент безразличен ко всем наборам (0,0), (1,0), и (0,1). Двумерные замыкания UDR пересекаются в одномерных гранях, которые пересекаются в клетке нулевой размерности.

Все это вписывается в стандартную схему из выпуклой геометрии, поэтому напомним следующие определения:

Определение 4.6: Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, такое как пространство цен.

1. Рациональный многогранник – это пересечение конечного набора полупространств $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \leq \alpha\}$ для некоторых $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ (нам не нужно дополнительно ограничивать).

2. *Грань* многогранника C максимизирует $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ над $\mathbf{p} \in C$ для некоторого фиксированного $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

3. *Внутренняя часть* многогранника C равна $C^0 := \{\mathbf{p} \in C': \mathbf{p} \notin C \text{ для любой грани } C' \subsetneq C\}$.

4. Рациональный многогранный комплекс Π представляет собой конечное множество ячеек $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, такую, что:

(a) если $C \in \Pi$, то C является рациональным многогранником, и любая грань C находится в Π;

(b) если C, $C' \in \Pi$, то либо $S \cap C = \emptyset$, либо $S \cap C'$ является гранью как C, так и C'.

5. K-клетка – это клетка размерности k. Грань — это клетка размерности $n-1$.

6. Многогранный комплекс является k-мерным, если все его клетки содержатся в его k-клетках, то есть в клетках размерности k.

7. *Взвешенный* многогранный комплекс – это пара $(\Pi, \mathbf{w})$, где Π – многогранный комплекс, а $\mathbf{w}$ – вектор, присваивающий вес $w(F) \in \mathbb{Z}_{>0}$ каждой грани $F \in \Pi$.

Клетки ценового комплекса определяются наборами линейных равенств и слабых неравенств. Таким образом, легко показать следующий результат:

Предложение 4.7: 1. *Комплекс прайса является n-мерным рациональным многогранным комплексом. 2. Клетки LIP, соединенные с весами граней, образуют* $(n-1)$*-мерный взвешенный рациональный многогранный комплекс.*

Таким образом, если C является клеткой ценового комплекса, то каждая грань C' из C, удовлетворяющая $C' \subsetneq C$, также является клеткой ценового комплекса. При ценах в таком C' агент требует дополнительные пакеты к тем, которые он запрашивает в C. Но ее набор требований постоянен внутри клетки:

Лемма 4.8: $D_u(\mathbf{p}°)$ постоянна для всех **p°** внутри C° клетки C. Более того, $D_u(\mathbf{p}°)$ определяет клетку: $C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : D_u(\mathbf{p}°) \subseteq D_u(\mathbf{p})\}$.

Напомним, что LIP $\mathcal{L}_u$ является объединением его граней. И, наоборот, можно привести следующую лемму:

Лемма 4.9: Пусть $u: A \to \mathbb{R}$.

1. UDR являются связанными компонентами дополнения $\mathcal{L}_u$, и поэтому являются выпуклыми, n-мерными, открытыми и плотными, а n-клетки комплекса цен являются замыканиями UDR.

Таким образом, можно легко переключаться между LIP $\mathcal{L}_u$ и его ценовым комплексом без ссылки на u или прямого применения определения 4.5, часть 1. Рисунок 4.1 иллюстрирует все эти моменты.

4.2.2. Вогнутость в оценках

Вогнутость оценки понимается в стандартном смысле "вогнуто-расширяемый", но с дополнительным свойством, поскольку допускается, что область может быть любым конечным подмножеством $\mathbb{Z}^n$:

Определение 4.10: Пусть $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ конечно, и пусть $u: A \to \mathbb{R}$.

1. A является дискретно-выпуклым, если оно содержит все целые точки внутри своей выпуклой оболочки, то есть $\mathrm{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^n = A$.

2. Пусть $\mathrm{conv}(u): \mathrm{conv}(A) \to \mathbb{R}$ для минимальной слабовогнутой функции, везде слабо большей, чем и (иногда называемой "вогнутой мажорантой" u).

3. u является вогнутой, если A дискретно-выпукло и $u(\mathbf{x}) = \mathrm{conv}(u)(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in A$.

Обычно, вогнутые оценки – это те, для которых каждый возможный пакет востребован по некоторой цене, и для которых спрос, установленный по любой цене, является дискретно-выпуклым точно так же, как для делимых, слабо вогнутых оценок, и по существу по тем же причинам: [1]

Лемма 4.11: $u: A \to \mathbb{R}$ является вогнутым,

если для всех $\mathbf{x} \in conv(A) \cap \mathbb{Z}^n$ существует $\mathbf{p}$ таким, что $\mathbf{x} \in D_u(\mathbf{p})$,

если $D_u(\mathbf{p})$ дискретно-выпукло для всех $\mathbf{p}$.

Оценка на рисунке 4.1(b) иллюстрирует несостоятельность вогнутости: для нее ни одна цена $\mathbf{p}$ не удовлетворяет $(0{,}1) \in D_u(\mathbf{p})$ и, например, $D_u(7{,}3) = \{(0{,}0), (0{,}2)\}$ не является дискретно-выпуклой.

Если слабо увеличивать оценку до тех пор, пока она не станет вогнутой, единственные значения, которые нужно изменить, – это значения для пакетов, которые ранее никогда не требовались. И увеличение стоимости любого никогда не востребованного пакета не влияет на поведение агента до тех пор, пока пакет не будет востребован лишь незначительно, когда оценка становится локально аффинной. Затем незначительно определенный пакет добавляется к пакету спроса по некоторым ценам, но никогда не востребован однозначно. Все остальные пучки требуются точно такими же, какими они были ранее, поэтому LIP остается неизменной. Например, на рисунке 4.1(b) увеличение $u(0{,}1)$ до 3 приводит к вогнутому значению, но не изменяет LIP. В более общем плане справедлива следующая лемма:

Лемма 4.12: Пусть Let $u: A \to \mathbb{R}$.

1. *Для каждого* $\mathbf{x} \in A$ выполняется $u(\mathbf{x}) = \mathrm{conv}(u)(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда существует $\mathbf{p}$ такое, что $\mathbf{x} \in D_u(\mathbf{p})$.

2. $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{u'}$, *где* u' *– это ограничение* $\mathrm{conv}(u)$ *на* $\mathrm{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^n$.

4.3. Теорема об оценочно-комплексной эквивалентности

Теперь мы формулируем математический результат, экономические последствия которого важны и, как мы полагаем, новы: теорема об оценочно-комплексной эквивалентности. Это показывает, что множество в $\mathbb{R}^n$ является границей оценки (т.е. локусом точек безразличия квазилинейной функции полезности) тогда и только тогда, когда оно обладает некоторыми легко проверяемыми геометрическими свойствами.

---

[1] Эти результаты проиллюстрированы примером из раздела 4.4. Для случая делимости см., например, работу (Mas-Colell, Whinston, and Green,1995, с. 135–138), особенно предложение 5.C.1(v)), поскольку квазилинейная функция полезности эквивалентна стандартной функции прибыли с одним- технология вывода.

Согласно предложению 4.4, что, как только станут известны спрос в одном конкретном UDR и веса LIP, можно вывести спрос в каждом UDR, перейдя через ряд граней. Но если следовать за агентом по ценовому пути, который заканчивается там, где начался, спрос в конце должен быть таким же, как и в начале. Таким образом, веса на гранях должны удовлетворять условию балансировки:

Определение 4.13 (Mikhalkin, 2004): $(n-1)$-мерный взвешенный рациональный многогранный комплекс Π *сбалансирован*, если для каждой $(n-2)$-клетки $G \in \Pi$ веса $w(F_j)$ на гранях $F_1, \dots F_l$, содержащих G, и примитивных целочисленные нормальные векторы V_{F_j}j для этих граней, которые определяются фиксированным направлением вращения вокруг G^9, удовлетворяют[1] $\sum_{j=1}^{l} w\left(F_j\right) V_{F_j} = 0$.

Например, рисунок 4.1(b) сбалансирован, потому что $2 \times (0,1) + 1 \times (-1,0) + 1 \times (1,-2) = 0$.

Это условие равновесия, является единственным условием, которому должен удовлетворять взвешенный рациональный многогранный комплекс, чтобы соответствовать некоторой оценке.

Однако эта оценка не уникальна. Во-первых, лемма 4.12, часть 2, показала нам, что каждая оценка приводит к тому же LIP, что и вогнутая оценка. Более того, изменение $u(\mathbf{x})$ путем добавления константы или увеличения пакета, требуемого по любой цене, на фиксированный пакет, оставляет LIP неизменной. Итак, чтобы определить уникальную вогнутую оценку, нам нужно указать спрос, установленный по некоторой цене, и стоимость одного пакета.

Теорема 4.14 — Теорема эквивалентности оценочного комплекса (Mikhalkin, 2004, Замечание 4.3 и Предложение 4.4): *Предположим, что* $(\Pi, \mathbf{w})$ является $(n-l)$-мерным взвешенным рациональным многогранным комплексом в $\mathbb{R}^n$, что $\mathcal{L}$ является объединением ячеек в Π, и что $\mathbf{p}$ есть ли какая-либо цена, не содержащаяся в $\mathcal{L}$.

1. *Существует конечное множество* $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ *и функция* $u: A \to \mathbb{R}$, *такая, что* $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$ и $\mathbf{w}_u = \mathbf{w}$, *тогда и только тогда, когда* $(\Pi, \mathbf{w})$ *сбалансировано*.

2. *Если* $(\Pi, \mathbf{w})$ *сбалансировано, тогда существует конечное множество* $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ *и уникальная вогнутая оценка* $u: A \to \mathbb{R}$ *такая, что* $D_u(\mathbf{p}) = \{\mathbf{0}\}$, $u(\mathbf{0}) = 0$, $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$, и $\mathbf{w}_u = \mathbf{w}$.

Теорема 4.14 завершает демонстрацию эквивалентности между оценками u, LIPs $\mathcal{L}_u$ и подходящими взвешенными многогранными комплексами $(\Pi, \mathbf{w})$. В нашем дополнительном материале (Болдуин и Клемперер (2019, приложение C)) приведен пример его применения.

Условие балансировки аналогично критериям интегрируемости, таким как теорема Африата (см. например, (Vohra, 2011, теорема 7.2.1). Но, в то время как Африат начал с (конечного) набора цен в сочетании со спросом, теорема 2.14 использует только информацию о геометрических разделениях в ценовом пространстве, созданных (неопределенными) изменениями спроса. Таким образом, мы можем развивать экономические идеи, интуицию и (контрпримеры), ссылаясь только на такие геометрические объекты, что может быть значительно проще, чем работать с явными оценками. Последующие разделы проиллюстрируют это.

4.5. Комплекс спроса

Двойственный нашему взвешенному ценовому комплексу – это "комплекс спроса" (в пространстве продуктов).

Определение 4.15: Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ и $u: A \to \mathbb{R}$.

1. Клетки комплекса спроса, σ, для u – это пакет $\sigma := conv(D_u(\mathbf{p}))$ для некоторого $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.
2. Комплекс спроса $\sum_u$ – это набор всех клеток комплекса спроса для u.
3. Вершинами комплекса спроса являются его 0-клетки.
4. Ребрами комплекса спроса являются его 1-клетки.
5. Длина ребра – это число лежащих вдоль него примитивных целочисленных векторов, из которых оно образовано (т.е. его евклидова длина, деленная на евклидову длину параллельного примитивного целочисленного вектора).

Легко видеть, что каждая клетка в $\sum_u$ является рациональным многогранником. Кроме того, мы имеем следующее:

Предложение 4.16: *Комплекс спроса является рациональным многогранным комплексом с размерностью, равной* $conv(A)$.

Мы поймем это Предложение с помощью альтернативного описания комплекса спроса, которое помогает интуиции, а также упрощает быстрое создание примеров. Во-первых, обратите внимание, что ясно, что справедливо следующее:

Лемма 4.17: $D_{conv(\mathbf{u})}(\mathbf{p}) = conv(D_u(\mathbf{p}))$ для всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

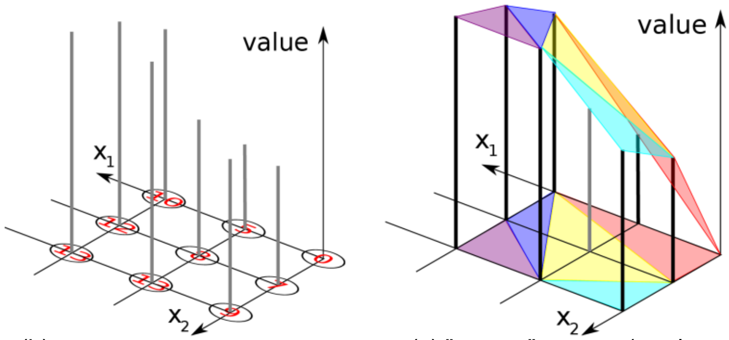
Теперь $conv(u)$ можно понимать как оценку делимых товаров. Таким образом, мы можем использовать стандартную конструкцию для вогнутой оценки: любой ценовой вектор определяет гиперплоскость, касательную к графику оценки агента, которая соответствует этому графику при заданном агентом спросе на эту цену. Но поскольку $conv(u)$ является лишь *слабо* вогнутой, некоторые касательные

[1] То есть возьмем любую достаточно маленькую окружность, расположенную вокруг точки в G и вписанную в двумерную плоскость, перпендикулярную G.Все векторы V_F должны быть направлены в одном направлении вокруг этой окружности.

гиперплоскости пересекаются с графом более чем в одной точке, а некоторые пакеты требований многозначны.

На рисунке 4.2(а) показаны точки $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ для всех $\mathbf{x} \in A$, а на рисунке 4.2(б) то же иллюстрируется с использованием столбцов. Возможные пакеты увеличиваются *влево* и *вниз*. Это наиболее четко выявит двойственность между совокупным спросом и совокупной взвешенной ценой.

$x_1 = 2$	$x_1 = 1$	$x_1 = 0$	u
10	5	0	$x_2 = 0$
12	8	7	$x_2 = 1$
13	13	9	$x_2 = 2$



(a) Табличное представление оценки, $u(\mathbf{x})$.

(b) представление оценки с использованием столбцов.

(c) "крыша" оценки (график $conv(u)$).

Рисунок 4.2. — Стоимостная оценка и ее «крыша).
Источник – (Baldwin and Klemperer, 2014)

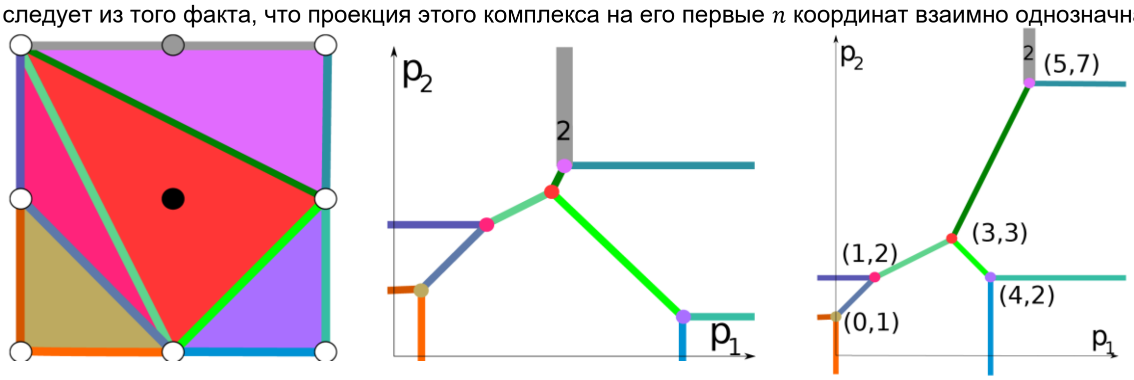
Н рисунке 4.2(c) добавляется третье измерение График $conv(\mathbf{w})$ называется "крышей" оценки. Рисунок 4.2(c) иллюстрирует это. При любой цене $\mathbf{p}$ пакеты $\mathbf{x}$, востребованные в соответствии с оценкой $conv(\mathbf{w})$, т.е. те, что максимизируют

$$conv(\mathbf{w})(\mathbf{x}) - \ \mathbf{p} \ \cdot \ \mathbf{x} = (-\mathbf{p}, 1) \cdot (\mathbf{x}, conv(\mathbf{w})(\mathbf{x})).$$

То есть $\mathbf{x}$ запрашивается в точке $\mathbf{p}$, если точка $(\mathbf{x}, conv(\mathbf{w})(\mathbf{x}))$ наиболее удалена от начала координат в направлении этой цены (т.е. в направлении $(-\mathbf{p}, 1)$). Таким образом, пересечение крыши и опорной гиперплоскости представляет собой множество вида $\hat{\sigma} = \{(\mathbf{x}, conv(\mathbf{w})(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D_{conv(u)}(\mathbf{p})\}$, где $\mathbf{p}$ таково, что $(-\mathbf{p}, 1)$ является нормалью к гиперплоскости. Эти множества называются гранями крыши (см. Определение 4.6, часть 2). Проецирование такой грани из $\mathbb{R}^{n+1}$ на ее первые n координат (в $\mathbb{R}^n$) просто дает множество $D_{conv(u)}(\mathbf{p}) = conv(D_u(\mathbf{p}))$ для этого $\mathbf{p}$. Итак, имеем:

Лемма 4.18: *$\hat{\sigma} \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ – грань крыши проекции $\hat{\sigma}$ на ее первые n координат – это клетка $\sigma \subsetneq \mathbb{R}^n$ комплекса спроса*.

Таким образом, проецирование граней крыши в $\mathbb{R}^n$ дает набор всех клеток комплекса спроса $conv(D_u(\mathbf{p}))$. Это проиллюстрировано проекцией под крышей на рисунке 4.2(c) и комплексом спроса на рисунке 4.3(а).[1] Более того, ясно, что грани крыши являются гранями многогранника, а именно выпуклой оболочкой точек $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$. Таким образом, эти грани образуют многогранный комплекс. Предложение 4.16 следует из того факта, что проекция этого комплекса на его первые n координат взаимно однозначна



(a) $\sum_u$ с сеткой целочисленных пакетов в $conv(A)$.

(b) Взвешенный LIP $(\mathcal{L}_u, w_u)$; его ценовой комплекс двойственный по отношению к $\sum_u$

(c) другой взвешенный LIP, ценовой комплекс которого также двойственный по отношению к $\sum_u$

РИСУНОК 4.3.—(a)–(b). Источник – (Baldwin and Klemperer, 2014)

[1] Изображение комплекса спроса начинается с клеток высшей размерности на сетке целочисленных наборов. Остальные клетки легко идентифицируются как грани клеток высшей размерности, в то время как сетка позволяет идентифицировать “длины” ребер и наборов в любой клетке. Мы опускаем оси, поскольку замена A на $A + \mathbf{c}$ для некоторого $\mathbf{c} \in Z$" и переопределение и, соответственно, приводит к комплексу спроса, двойственному тому же взвешенному ценовому комплексу.

Комплекс спроса и взвешенный предел оценки u, приведены на рисунке 4.3.(a); двойственные геометрические объекты имеют одинаковый цвет, а затенение (черная вершина в 4.3 (a) не имеет двойственного объекта в 4.3 (b)). Взвешенные LIP оценки, *отличной* от u, *также* двойственной по отношению к комплексу спроса 4.3 (a), показан в 4.3(c).

На рисунке 4.3(a) показаны пять 2-мерные клетки (области), закрашенные в соответствии с соответствующими участками плоскостей крыши на рисунке 4.2(c). 2-мерные клетки разделены одиннадцатью ребрами (отрезками линии – 1-клетками), которые сами встречаются в семи вершинах (0-клетках) комплекса спроса.

Только "белые" круги представляют вершины вершинах комплекса спроса. Серые и черные круги представляют связки, которые не находятся в вершинах комплекса спроса, поскольку они не являются однозначно востребованными ни по какой цене. Действительно, комплекс спроса не может подсказать, востребованы ли когда-либо такие невершинные связки, как эти. Однако он показывает, что если невершинный пакет востребован по любой цене, то он востребован по цене (ценам), соответствующей тем клеткам, в которых он находится. Чтобы увидеть это, надо взять пересечение множества пакетов, востребовнных по любой цене, с выпуклой оболочкой спроса по определенной цене $\mathbf{p}$ и показать, что это множество равно $D_u(\mathbf{p})$. Во-первых, все пакеты в $D_u(\mathbf{p})$ находятся в этом пересечении. Во-вторых, из леммы 4.12, часть 1 следует, что если пакет $\mathbf{x}$ востребован по любой цене, то $u(\mathbf{x}) = conv(u)(\mathbf{x})$. И напомним из леммы 4.17, что $conv\big(D_u(\mathbf{p})\big) = D_{conv(u)}(\mathbf{p})$. Если $\mathbf{x} \in D_{conv(u)}(\mathbf{p})$ удовлетворяет $u(\mathbf{x}) = conv(u)(\mathbf{x})$, то очевидно, что $\mathbf{x} \in D_u(\mathbf{p})$. Итак, доказана следующая лемма:

Лемма 4.19 — Лемма о псевдоравновесных ценах (см. (Milgrom, and Strulovici, 2009 , теорема 18)): Если существует какая-либо цена, по которой требуется $\mathbf{x}$, то для всех $\mathbf{p}$, таких, что $\mathbf{x} \in D_{conv(u)}(\mathbf{p})$, следует, что $\mathbf{x} \in D_u(\mathbf{p})$.

4.6. Двойственность

Теперь можно увидеть поучительную (и прекрасную) двойственность между совокупностью спроса и совокупностью взвешенных цен.[1]

Поскольку вершины комплекса спроса находятся в пакетах, которые однозначно востребованы по некоторой цене, они соответствуют UDR. И ребро комплекса спроса между вершинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ указывает на существование цен $\mathbf{p}$, для которых пакет спроса содержит оба этих пакета. Более того, такие $\mathbf{p}$ образуют (($n-1$)-мерную) грань LIP, поскольку они определяются только одним ограничением равенства $u(\mathbf{x}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = u(\mathbf{x}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$.[2] И, как показано в предложении 4.4, $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = const$ для всех этих ценовых векторов $\mathbf{p}$.Таким образом, каждая граница комплекса спроса нормальна к грани, которая соответствует ей в LIP. И в более общем плане справедливо следующее:

Предложение 4.20 —Двойственность: *Существует биективное соответствие между комплексом спроса и взвешенным ценовым комплексом, связывающее: вершины комплекса спроса с замыканиями UDR; ребра комплекса спроса со взвешенными гранями LIP; и k-клетки* σ *комплекса спроса с* $(n-k)$*-клетками* C_σ *ценового комплекса для* $1 \le \mathrm{k} \le \dim convA$*;такие, что:*

1. $\sigma = conv\big(D_u(\mathbf{p})\big)$ *iff* $\mathbf{p} \in C_\sigma^0$;
2. $C_\sigma = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{\sigma} \subseteq conv\big(D_u(\mathbf{p})\big)\}$;
3. *обратные отношения включения*: $\sigma \subsetneq \sigma'$ *iff* $C_{\sigma'} \subsetneq C_\sigma$;
4. *двойственные клетки ортогональны*: $(p' - p) \cdot (x' - x) = 0$ *для всех* $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in C_\sigma$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \boldsymbol{\sigma}$;
5. *грань* F_σ *соответствуют ребрам* σ *длины* $w_u(F_\sigma)$.

Комплекс спроса и взвешенный предел оценки на рисунке 4.2(a) изображены на рисунках 4.3(a) и 4.3(b) соответственно; клетки, которые являются двойственными по отношению друг к другу, изображены в том же цвете.

Черная точка в $\sum_{\boldsymbol{u}}$, представляющая пакет (1,1), не имеет соответствующего ей объекта в TH – она "скрыта" внутри точки алого цвета в LIP.

Таким образом, 0-клетки LIP по ценам (5, 7), (4, 2), (3,3) и (0,1), (1,2) двойственны фиолетовым, желто-зеленым и алым 2-клеткам комплекса спроса соответственно; девять граней LIP двойственны девяти соответствующим образом оформленным краям комплекса спроса; и каждый из семи UDR вокруг LIP двойственен одному из семи пакетов в белых кругах, которые являются семью вершинами комплекса спроса.

Обратите внимание, что темно-серый горизонтальный край в верхней части комплекса спроса проходит через связку и имеет *вес* 2 (в смысле определения 4.15, часть 5). Он двойственен темно-серой вертикальной грани LIP, которая, соответственно, имеет вес 2 и обозначена таким образом (см. Предложение 4.4). Все остальные ребра этого комплекса спроса имеют длину 1; все остальные грани LIP соответственно имеют вес 1.

[1] Конструкция использует двойственность Лежандра-Фенхеля (Murota, 2003). В работах (Baldwin and Klemperer, 2014, 2019) используется теоретико-категориальная "двойственность", которая позволяет объекту иметь несколько эквивалентных "двойственностей".

[2] Если в A, лежащем на ребре, есть дополнительные точки, они не накладывают дополнительных линейно независимых ограничений на такое p; смотрите последующее обсуждение, относящееся к "темно-серому ребру".

Как Как отмечалось в предыдущем подразделе, ни серый пакет, ни черный пакет не находятся в вершине комплекса спроса, поскольку ни один из них заведомо никогда не востребован ни по какой цене, поэтому они также не соответствуют никаким UDR.

Более того, ни LIP, ни комплекс спроса не могут сказать нам, является ли когда-либо востребованным невершинный пакет, такое как одно из этих. Однако из леммы о псевдоравновесных ценах (лемма 4.19) мы знаем, что, поскольку центральная волнисто-затененная (пятисторонняя) клетка комплекса спроса является единственной клеткой комплекса спроса, в которой находится черный пакет, соответствующая волнисто-затененная 0-клетка LIP, в которой этот пакет "скрыт" указывает единственную цену $(1,2)$, по которой этот пакет может быть востребован. Аналогично, поскольку темно-серый горизонтальный край в верхней части комплекса спроса является клеткой комплекса спроса с наименьшим размером, в которой находится серый пакет, соответствующая темно-серая вертикальная грань LIP, в которой этот пакет "скрыт", указывает только цены $(4, p_2)$ для $p_2 \geq 8$—см. рис. 4.3(b)), при котором этот пакет может быть востребован.

Фактически, согласно лемме 4.12, часть 1, $(x, u(x))$ находится в верхней части для невершинного пакета $\mathbf{x}$ — и поэтому пакет востребован — тогда и только тогда, когда оценка u аффинна в соответствующем диапазоне. Серый пакет является примером этого. Он находится в $(1,0)$, и его значение, 4, является средним из значений, 0 и 8, для пакетов $(0,0)$ и $(2,0)$, поэтому он востребован по ценам $\{(4, p_\mathbf{2}2) : p2 \geq 8\}$.

Однако, если u не является вогнутым в не-вершинном расслоении, значение расслоения лежит строго под крышей, поэтому оно никогда не требуется - оно "перепрыгивается" при переходе между UDR.

Черный пакет в центре комплекса спроса иллюстрирует это. Его стоимость по u строго ниже его стоимости по $conv(u)$, поэтому он находится строго под "крышей" (см. рис. 4.2(c)) и заведомо не востребован ни по какой цене. Лемма о псевдоравновесных ценах (лемма 4.19) и Предложение 4.20, часть 1, позволяют охарактеризовать набор цен, по которым востребован пакет $\mathbf{x}$, если он востребован по какой-то цене:

Следствие 4.21: *Предположим, что C_σ является минимальной клеткой комплекса спроса, такой, что $\mathbf{x} \in \sigma$, и что $\mathbf{x}$ востребован по некоторой цене. Тогда $\mathbf{x} \in D_u(\mathbf{p})$ iff $\mathbf{p} \in C_\sigma$.*

Наконец, обратите внимание, что для любого отдельного комплекса спроса существует множество взвешенных LIP, которые удовлетворяют соотношениям соответствия и ортогональности предложения 4.20. Например, на рисунках 3(b) и 3(c) приведены два разных сбалансированных взвешенных значения — и, следовательно, две разные оценки, — которые оба являются двойственными по отношению к комплексу спроса на рисунке 3(a). Таким образом, естественно сгруппировать вместе все оценки, комплексы спроса которых либо одинаковы, либо отличаются только постоянным сдвигом на некоторый пакет $\mathbf{x}$:

Определение 4.22: Две оценки u, u' имеют одинаковый комбинаторный тип, если одинаковы их комплексы спроса, или если существует $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $\sigma \in \sum_u$ iff $\{x\} + \sigma \in \sum_{u'}$.

Легко перечислить все возможные комплексы спроса и примеры двойственных взвешенных LIPs, которые демонстрируют комбинаторный тип (таким образом, давая все "существенно разные" структуры спроса), если область не слишком велика – смотрите рисунки 10 и 11 примера B.2 в приложении B.2, где мы также приведите дальнейшее обсуждение рисунков 2 и 3.

4.7. Представление в пространстве цен в сравнении с пространством продуктов

Хотя взвешенный круг и комплекс спроса являются двойственными, существует важное различие: теорема об эквивалентности оценочного комплекса применима только к ценовому пространству. В пространстве продуктов, напротив, ***неверно***, что каждый способ разделения $conv(A)$ на рациональный многогранный комплекс дает комплекс спроса. (Смотрите (Maclagan, Sturmfels, 2015), рисунок 2.9, для подразделения, соответствующие отсутствию LIP и, следовательно, отсутствию оценки.) Также, по-видимому, не существует какой-либо простой проверки того, какие многогранные комплексы в пространстве продуктов соответствуют какой-либо оценке. Таким образом, хотя мы можем разработать примеры, например, для проверки гипотез, работая с геометрическими объектами в ценовом пространстве, и быть уверенными, что соответствующие оценки будут существовать, это трудно сделать в пространстве продуктов.

Кроме того, LIPs показывает фактические цены, по которым востребованы пакеты, в то время как комплекс спроса показывает только наборы пакетов, среди которых агенту безразличны некоторые цены. Поскольку также гораздо проще агрегировать оценки агентов в пространстве цен (см. раздел 5.3), мы в основном работаем в ценовом пространстве.

Однако некоторая информация, которая только подразумевается во взвешенном LIP, становится очевидной в комплексе спроса, в пространстве продуктов. Например, в разделах 4.1 и 5 мы увидим, что низкоразмерная клетка LIP иногда "скрывает" важную деталь, которую гораздо легче увидеть в двухмерном объекте более высокого размера в комплексе спроса. Более того, самый простой способ рассчитать предел конкретной оценки часто заключается в том, чтобы сначала найти комплекс спроса (например, легко перейти от рисунка 4.2(a) к рисунку 3(a), а затем, используя двойственность, к рисунку 4.3(б).; как правило, гораздо сложнее составить прогноз непосредственно на основе оценки.

Тот факт, что различные представления полезны в разных контекстах, делает особенно ценной способность легко переключаться между ними, используя двойственность.

5. Типы спроса

5.1. Определение типов спроса и сравнительная статика

В предыдущем разделе мы видели, что фасетные нормали LIP описывают, как изменяется спрос между UDR (Предложение 4.4). Таким образом, они дают все возможные направления изменения спроса (если таковые имеются), которые, как правило, могут возникнуть в результате небольшого изменения цен. Таким образом, естественно классифицировать оценки по "типам спроса" в соответствии с этими нормалями граней.

Затем тип спроса при оценке дает нам сравнительную статическую информацию, аналогичную информации, которую матрица Слуцкого предоставляет для оценки делимых товаров по единой цене.

Определение 5.1: Пусть $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ — набор ненулевых примитивных целочисленных векторов, таких, что если v g $\mathcal{D}$, то -v € $\mathcal{D}$. *Тип спроса*, определенный с помощью $\mathcal{D}$, содержит значения, такие, что каждая грань $\mathcal{L}_u$ имеет вектор нормали в $\mathcal{D}$.

Например, оценка на рисунке 1(а) относится к типу спроса $\pm\{(1,0),(0,1),(-1,1)\}$, как и многие другие оценки, такие как все те, что показаны на рисунках 5.8 (а)–(в). Оценка относится к любому типу спроса, который содержит нормали грани его LIP; ограничиваясь минимальным таким набором. Однако справедлива следующее утверждение:

Предложение 5.2: *Каждый тип спроса, определяемый конечным набором примитивных целочисленных векторов $\mathcal{D}$, является минимальным типом спроса для некоторой оценки*.

Доказательство.: Для каждой пары векторов $\pm\{v\} \in \mathcal{D}$ выберите (любую) одну гиперплоскость, нормальную к ним. Объединение этих гиперплоскостей является рациональным многогранным комплексом, и если применить вес 1 к каждой грани, то оно сбалансировано. Остается применить часть 1 теоремы об эквивалентности оценочного комплекса (теорема 4.14). Ч.Т.Д.

В силу двойственности (Предложение 4.20) мы могли бы эквивалентно классифицировать оценки в соответствии с направлениями краев их комплексов спроса.[1] Но из нашего описания становится ясно, что тип спроса обеспечивает общую сравнительную статику. Как обычно, мы говорим, что свойство выполняется для "общего" $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, если оно выполняется для всех p в плотном открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$.

Предложение 5.3: *Следующее эквивалентно для оценки u*:

1. u *относится к типу спроса* $\mathcal{D}$;

2. *для любого* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ *и для общего* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, *если* $\exists\epsilon > 0$ *такие, что* $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}+\epsilon\mathbf{t}$ *находятся в разных UDR, и такие, что* $\nexists\epsilon' \in (0,\epsilon)$ *такие, что* $\mathbf{p}+\epsilon'\mathbf{t}$ *находится в третьем отдельном UDR, то разница между связками, требуемыми в* p *и* $\mathbf{p}+\epsilon\mathbf{t}$, *находится целое число, кратное некоторому вектору в* $\mathcal{D}$.

Доказательство.: Обычно цена **p** является ценой UDR, а прямая линия от **p** в направлении **t** пересекает грани только внутри них. При условии 2 таким образом пересекается только одна грань, поэтому изменение спроса задается вектором в $\mathcal{D}$. То, что условия 1 и 2 эквивалентны, теперь непосредственно вытекает из предложения 4.4. Ч.Т.Д.

Более того, поскольку область А конечна, реакция на любое конкретное изменение цены может быть, в общем, разбита на серию шагов такого вида. И что важно, как мы увидим, Предложение 3.3 раскрывает тесную взаимосвязь между типами спроса и стандартными экономическими описаниями сравнительной статики.

В работе (Baldwin and Klemperer, 2014) обсуждались изменения неустойчивых цен (т.е. тех, которые не начинаются с UDR), а также дали другие эквивалентные характеристики типов спроса, но для наших целей будет достаточно предложения 5.3.

5.2. Заменители, дополнения и другие "Типы спроса"

Из этого прямо следует, что типы спроса дают простые характеристики знакомым понятиям, таким как обычные заменители, обычные дополнения и "сильные заменители". Эти характеристики легче обобщить, чем стандартные, основанные на непосредственном наложении ограничений на u. Более того, они более четко выявляют и объясняют такие особенности, как отсутствие симметрии между заменителями и дополнениями.

Начнем с напоминания стандартных определений:

Определение 5.4—стандартное: Пусть $u: A \to \mathbb{R}$.

1. u является обычной заменой, если для любых цен UDR $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$ с $D_u(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x}\}$ и $D_u(\mathbf{p}') = \{\mathbf{x}'\}$ мы имеем $x'_k \geq x_k$ для всех k таких, что $p'_k = p_k$. [2]

2. u является обычным дополнением, если для любых цен UDR $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$ с $D_u(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x}\}$ и $D_u(\mathbf{p}') = \{\mathbf{x}'\}$ мы имеем $x'_k \leq x_k$ для всех k таких, что $p'_k = p_k$.

[1] В работе Данилова, Кошевого и их соавторов эти векторы рассматривались в пространстве продуктов. Однако они не использовали их для создания таксономии спроса или, например, не интерпретировали их как предоставляющие сравнительную статистическую информацию. В работе (Baldwin and Klemperer, 2012, 2014, 2019), напротив, разрабатывается общая концепцию для их понимания в экономических терминах.

[2] Здесь $p \geq p$ означает выполнение неравенства по компонентам. Термин «обычные заменители» означает то, что большинство других авторов называют «заменителями»

3. u – сильные заменители, если, когда мы рассматриваем каждую единицу каждого товара как отдельный товар, это оценка для обычных заменителей. [1]

Легко использовать Предложение 5.3, чтобы предоставить альтернативные, эквивалентные определения этих понятий как типов спроса. Для заменителей мы определяем и доказываем следующее:

Определение 5.5: (n-мерные) *векторы обычных заменителей* представляют собой набор ненулевых примитивных целочисленных векторов $v \in \mathbb{R}^n$, содержащих не более одной записи с положительной координатой и не более одной записи с отрицательной координатой. Они определяют *тип спроса на обычные заменители* (для n товаров).

Предложение 5.6: *Оценка является обычной оценкой заменителей, если и только если она относится к типу спроса на обычные заменители*.

Доказательство. Пусть изменение спроса с цены UDR $\mathbf{p}$ на цену UDR $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$ происходит таким образом, что $D_u(\mathbf{p}') = D_u(\mathbf{p})$. Запишем $\mathbf{t}:= \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ и $\{\mathbf{x}\} = D_u(\mathbf{p})$. Согласно предложению 3.3, мы можем выбрать $\widetilde{\mathbf{p}}$ сколь угодно близко к $\mathbf{p}$ таким образом, что если $\widetilde{\mathbf{p}}'' = \widetilde{\mathbf{p}} + \epsilon\mathbf{t}$ находится в первом UDR, отличном от $\mathbf{x}$, на линии от **p** в направлении **t**, и если **x"** требуется в **p**", то $\mathbf{x}'' - \mathbf{x}$ является целое число, кратное обычному вектору замещений. В частности (поскольку UDR открыты), мы можем выбрать такой $\widetilde{\mathbf{p}}$, чтобы он находился в том же UDR, что и $\mathbf{p}$, и такой, чтобы $\mathbf{p} + \epsilon\mathbf{t}$ находился в замыкании UDR, содержащего **p**", подразумевая, что $\mathbf{x}'' \in D_u(\mathbf{p} + \epsilon\mathbf{t})$.

По стандартным результатам, $(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) \cdot (\widetilde{\mathbf{p}}'' - \widetilde{\mathbf{p}}) < 0$ (см., например, (Mas-Colell, Whinston and Green, 1995, Предложение 3.E.4). Но $\widetilde{\mathbf{p}}'' - \widetilde{\mathbf{p}} = \epsilon\mathbf{t} = \epsilon(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \geq 0$. Таким образом, $\mathbf{x}'' - \mathbf{x}$ должно иметь строго отрицательную координату для некоторого товара, цена которого строго возрастает от **p** к **p'**. Но $\mathbf{x}'' - \mathbf{x}$ является целым числом, кратным обычному вектору замещений, и поэтому имеет не более одной отрицательной координаты, *поэтому спрос слабо возрастает на все товары, цена которых не меняется*.

Если мы будем применять этот процесс повторно, пока не достигнем окончательной цены в том же UDR, что и **p**, мы будем делать один и тот же вывод на каждом шаге. Итак, в целом, Определение 5.4, часть 1 выполняется.

Рисунки 5.1 и 5.3(b)–3(c) иллюстрируют владение имуществом-заменителем; Рисунки 5.4 (b)-54(d), приведенные ниже, покажут, что это не удается. Таким образом, вектор, который нормален к грани выступа для заменителей, не может иметь двух ненулевых значений одного и того же знака. Чтобы понять необходимость этого, рассмотрим LIP с гранью, первая и третья координаты вектора, нормали которого имеют одинаковый знак. Повышение цены либо на товар 1, либо на товар 3 может привести нас к другому результату — снижению спроса как на товары 1, так и на товары 3. Таким образом, этот аспект создает взаимодополняемость по некоторым ценам и поэтому не может быть частью предложения заменителей. Смотрите пример B.3 (Baldwin, Klemperer? 219) для более подробного обсуждения.

Что касается комплементов, то изменение цены, снижающее спрос на товар, может, конечно, снизить (но не увеличить) спрос на другие товары:

Определение 5.7: (n-мерные) векторы обычных дополнений представляют собой набор ненулевых примитивных целочисленных векторов $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$, все ненулевые элементы координат которых имеют одинаковый знак. Они определяют *тип спроса на обычные дополнения* (для n товаров).

Итак, применяя Предложение 5.3 таким же образом, как и в доказательстве предложения 5.6:

Предложение 5.8: *Оценка является обычной дополняющей оценкой*, если и только если *она относится к типу обычного дополняющего спроса*.

Отсутствие симметрии между заменителями и дополнениями и причина этого теперь ясны: обычные векторы дополнений могут иметь любое количество ненулевых элементов (одного и того же знака), но любая пара ненулевых элементов в обычном векторе заменителей должна иметь противоположные знаки, поэтому обычные векторы заменителей могут иметь по крайней мере максимум две ненулевые записи.

Характеристика сильных заменителей как типа спроса также дает их интуитивное описание:

Определение 5.9: *Векторы сильных заменителей* – это те ненулевые значения $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$, которые имеют не более одной записи +1, не более одной записи -1 и никаких других ненулевых записей. Они определяют *тип спроса на сильные заменители*.

Предложение 5.10 — см. Болдуин и Клемперер (2014, следствие 5.20); и (Shioura and Tamura, 2015, теорема 4.1(i)): *Оценка является сильной заменой, если и только если она вогнута и относится к типу спроса на сильные заменители*.

Таким образом, на рисунках 1(a), 4(a) и 8(a)–(в) показаны оценки сильных заменителей.

Сейчас, в разделе 5.2 будет показано, что типы спроса также позволяют охарактеризовать важные новые классы оценок.

[1]Это эквивалентно определению (Milgrom and Strulovici, 2009) — см. (Danilov, Koshevoy and Lang, 2003, следствие 5). Существует множество других эквивалентных определений (Shioura and Tamura, 2015), в частности, "M -вогнутость" оценки (Murota and Shioura1999). Когда существует только одна единица каждого товара, это также эквивалентно "грубым заменителям" (Kleso and Crawford, 1982), но это название не проводит различия между обычными и сильнодействующими заменителями, когда доступно несколько единиц.

Переупаковка товаров, так что любая целочисленная упаковка все еще может быть получена путем покупки и продажи целочисленного набора новых пакетов, соответствует, конечно, унимодулярному изменению базиса, которое искажает границу, но сохраняет свою природу как “сложного”. В частности, для унимодулярной $n \times n$ матрицы G, определяется (как это стандартно) “откат” оценки $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ как $G^*u: G^{-1}A \rightarrow \mathbb{R}$ через $G^*u(\mathbf{x}) := u(G\mathbf{x})$. Тогда выполняется следующее):

Предложение 5.11—ср., например, Гурман (GORMAN, 1976, стр. 219–220): Пусть $u: A \rightarrow \mathbb{R}$, пусть G – унимодулярная матрица $n \times n$, и пусть G^*u – откат от u на G.

1. $\mathbf{x} \in D_u(\mathbf{p})$ iff $G^{-1}\mathbf{x} \in D_{G^*u}(G^T\mathbf{p})$;

2. $\mathcal{L}_{uG^*u} = G^T\mathcal{L}_u := \{G^T\mathbf{p}: \mathbf{p} \in \mathcal{L}_u;$

3. $u(\cdot)$ относится к типу спроса $\mathcal{D}$, тогда и только тогда, когда $G^*u(\cdot)$ относится к типу спроса $G^{-1}\mathcal{D}: = \{G^{-1}\mathrm{V}: \mathrm{V} \in \mathcal{D}\}$.

Пример B.4 из (Baldwin and Klemperer, 2019) дает иллюстрацию.

Некоторые экономические свойства оценок, конечно, изменяются в результате таких преобразований от одного типа спроса к другому: в частности, местные компромиссы (так, являются ли оценки заменителями или дополнениями и т.д.) Но многие важные свойства сохраняются — см. Предложение 4.7 ниже о равновесии, а также (Baldwin and Klemperer, 2014), особенно раздел 5. Итак, полезно знать, например, что следующие типы спроса являются просто унимодулярными базисными изменениями сильных заменителей:

"*Последовательные игры*" см. (Greenberg and. Weber, 1986), а также (Danilov, Koshevoy and Lang, 2003). Предварительное умножение векторов сильных заменителей, e^i и $(e^i - e^j)$, на верхнюю треугольную матрицу 1s (соответствующей размерности) дает векторы $\sum_{k=1}^{j} e^k$ и $\sum_{k=j+1}^{i} e^k$ для $i > j$ соответственно (и их отрицания). Это тип спроса на товары, которые имеют естественный фиксированный заказ и для которых любая непрерывная коллекция товаров может рассматриваться любым агентом как дополнение. Например, оценки для полос радиочастотного спектра или для "участков" морского дна, которые будут разрабатываться для морского ветра, могут иметь такую форму.

"Обобщенные валовые оценки заменителей и дополнений". Предварительное умножение векторов сильных заменителей на матрицу, сформированную из $\{e^i: i \leq k\} \cup \{-e^i: i > k\}$ для некоторого k, дает тип спроса, при котором товары могут быть разделены на две группы, причем товары внутри одной группы являются сильными заменителями, и каждый товар также может быть пример 1:1 взаимодополняемость с любым товаром из другой группы.

5.3. Типы спроса и совокупный спрос

Важной особенностью нашей классификации типов спроса, которая, в частности, значительно облегчает изучение равновесия, является то, что тип спроса, когда агрегируются оценки от нескольких агентов, является просто объединением наборов векторов, которые формируют типы спроса отдельных агентов.

Итак, теперь J – конечное множество агентов: агент $j \in J$ имеет оценку u^j для целых наборов в конечном множестве A^j . Их совокупный спрос – это, конечно, сумма индивидуальных запросов (по Минковскому), но, чтобы применить к этому наши методы, мы хотим рассматривать это как требование одного “совокупного” агента.

Определение 5.12: Совокупная оценка $\{u^J: j \in J\}$ – это оценка u^J с областью $A = \sum_{j \in J} A^j$ такая, что $D_{u^J}(\boldsymbol{p}) = \sum_{j \in J} D_{u^j}(\mathbf{p})\ \forall\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

Агрегированные оценки не определены однозначно. Однако это не имеет значения: поскольку наборы совокупного спроса однозначны, такие свойства, как вогнутость агрегированных оценок, также однозначны, а взвешенный по совокупности LIP уникален. (Тот факт, что мы можем построить совокупный LIP из отдельных LIP, не зная формы u^J — то есть без использования какой–либо громоздкой формулы для u^J – является важным преимуществом агрегирования в пространстве цен.)

В остальной части этого подраздела доказывается и обсуждается следующая лемма:

Лемма 5.13: *Задан конечный набор оценок* $\{u^J: j \in J\}$):

1. *существует совокупная оценка* u^J;

2. $\mathcal{L}_{u^J} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{L}_{u^j}$,

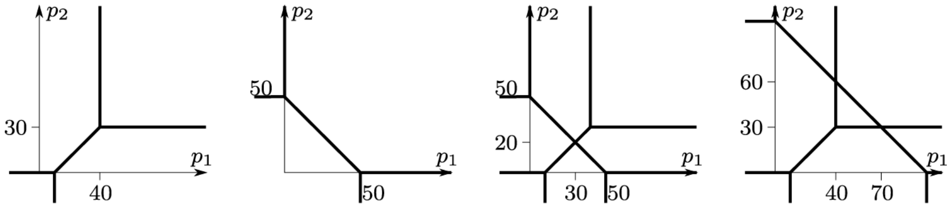
3. *если* F *является гранью* $\mathcal{L}_{u^J}$, то $w_{u^J}(F) = \sum_{F^j \in \mathcal{F}} w_{u^j}(F^j)$, в котором $\mathcal{F}$ – *это множество всех граней отдельного* $\mathcal{L}_{u^j}$, *которые содержат* F.

Следствие 5.14: *Вся совокупность индивидуальных оценок относится к типу спроса* $\mathcal{D}$, *если каждая совокупная оценка каждого конечного подмножества из них относится к типу спроса* $\mathcal{D}$.

Например, на рисунках 5.4 (а)-(б) показаны оценки Элизабет и Пола для гостиничных номеров в нашем вводном примере, если мы расширим обе оценки до полной области {0,l}2. Элизабет рассматривает комнаты как заменители; ее оценка составляет $u^s(x_1, x_2) = max\{40x_1, 30x_2\}$ (рис. 4(a)). Пол рассматривает их как взаимодополняющие; его оценка $u^c(x_1, x_2) = min\{50x_1, 50x_2\}$ (рис. 4(b)).

Легко видеть, что набор совокупного спроса состоит из уникального пакета, если это делают все индивидуальные наборы спроса (и, таким образом, для доказательства леммы 5.13, часть 2; см. также (Murota, 2003), раздел 11.2). Таким образом, на рисунке 4(c) показаны совокупные значения LIP $\mathcal{L}_{u^{(s,c)}}$ для оценок u^s и u^c. Очевидно, что тип спроса содержит индивидуальные оценки, если он содержит какую-либо совокупную оценку (следствие 5.14).

Из совокупного LIP мы можем получить новый взвешенный ценовой комплекс обычным способом (лемма 4.9). Его клетки являются пересечениями ячеек из отдельных ценовых комплексов. Таким образом, цена $(30,20)$ на рисунке 4(c) представляет собой 0-ячейку на границе четырех различных граней. Запишите Π для подкомплекса ячеек LIP. Изменение совокупного спроса между любой парой цен представляет собой сумму изменений индивидуального спроса. Таким образом, вес любой грани F совокупного выступа равен сумме весов всех граней F' отдельных выступов, для которых $F \subseteq F'$ (что доказывает лемму 5.13, часть 3). И поскольку взвешенный многогранный комплекс (Π, w) является производным от сбалансированных комплексов, он сам по себе сбалансирован, и поэтому (используя теорему 4.14, часть 1) он является пределом некоторой оценки (таким образом, выполняется лемма 5.13, часть 1).



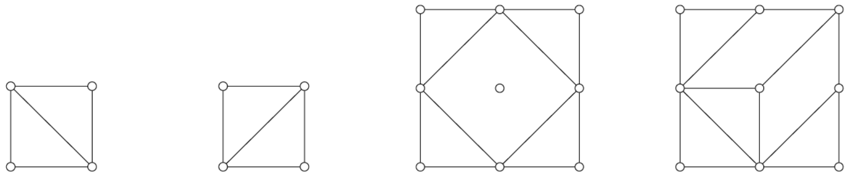
(a) $\mathcal{L}_{u^s}$ (b) $\mathcal{L}_{u^c}$ (c) $\mathcal{L}_{u^{\{s,c\}}}$ (d) $\mathcal{L}_{u^{\{s,c*\}}}$

Рисунок 5.4. — Результаты: (а) оценки; простого замещения и (б) простой дополняющей оценки.
Источник – (Baldwin and Klemperer, 2019)

Совокупный результат: (c) показанных оценок заменителей и дополнений; и (d) показанной оценки заменителей и дополнительной оценки, при которой совокупность обеих комнат вместе имеет более высокую стоимость (которая превышает $u^s(1,0) + u^s(0,1)$).

Однако *невозможно* найти комплекс спроса для совокупной оценки, используя только отдельные комплексы спроса: комплекс спроса не соответствует уникальной оценке, и разные оценки могут агрегироваться по-разному.

Например, комплексы спроса, соответствующие LIP на рисунках 5.4 (а)-(б), показаны на рисунках 5.5(а)-(в). Комплекс спроса, соответствующий их совокупному пределу (рис. 4(в)), показан на рис. 5(в); его область равна $\{0,1\}^2 + \{0,1\}^2 = \{0,1,2\}^2$. Если оценка Пола увеличится до $u^{c*}(x_1, x_2) = min\{100x_1, 100x_2\}$, то его комплекс спроса останется таким же, как на рисунке 5(b). Однако LIP $\mathcal{L}_{u^{(s,c*)}}$ показан на рисунке 4(d), а его комплекс спроса соответствует комплексу спроса на рисунке 5(d). Таким образом, не существует уникального комплекса совокупного спроса, соответствующего комплексам спроса на рисунке 5(a) и рисунке 5(b).



(a) Σ_{u^s} (b) $\Sigma_{u^c}, \Sigma_{u^{c*}}$ (c) $\Sigma_{u^{\{s,c\}}}$ (d) $\Sigma_{u^{\{s,c*\}}}$

Рисунок 5.5. —Комплексы требований, аналогичные показанным на рисунках 4(а)–(г), когда каждая грань имеет вес 1. (Пакеты в областях оценок показаны без цветовой маркировки.)
Источник – (Baldwin and Klemperer, 2014)

5. Механизмы

Настоящий раздел – краткий пересказ (Crowwell and Tran, 2016). Выбор именно этой работы связан с тем, что в ней наиболее ярко представлена роль тропической геометрии с демонстрацией ее особенностей. Работа находится в свободном доступе в https://arxiv.org/pdf/1606.04880v1 .

Согласно (Crowwell and Tran, 2016, 2018) механизмы – это игры, разработанные для достижения целевого результата в экономике с информационными ограничениями. Хорошо продуманный механизм правдиво выявляет личную информацию агентов с учетом их стратегического поведения. Важный класс составляют механизмы с совместимой со стимулами доминирующей стратегией (D-IC). При квазилинейных полезностях классическая теорема Роше (Rochet, 1987) утверждает, что механизм является (D-IC) тогда и только тогда, когда все циклы на определенном взвешенном графе неотрицательны. С этим условием, известным как циклическая монотонность (Rockafellar, 1970), довольно трудно работать в теории. Многие работы были посвящены выявлению областей, в которых для (D-IC) достаточны более простые условия, такие как слабая монотонность, см. (Braverman, Hassidim, and Monderer, 2010) и дополнительные ссылки в (Sergeev, 2009). В частности, Сакс и Ю (Saks and Lan Yu, 2005) показали, что если пространство типов выпуклое, то слабая монотонность подразумевает (D-IC). В (Ashlagi, et all 2010) показано обратное: если пространство типов не является выпуклым, то можно построить механизм, который является слабо монотонным, но не (D-IC).

Статья (Crowwell and Tran, 2016) содержит три основных результата. Для пространства произвольного типа T дана геометрическая характеристика всех возможных механизмов (теорема 4.2), всех возможных слабомонотонных механизмов (теорема 4.11) и всех возможных (D-IC) механизмов (теорема 4.6), которые могут возникнуть на T. Эти результаты упрощают проверку и визуализацию совместимости стимулов как теоретически, так и вычислительно. В частности, получены простые доказательства ряда известных результатов, в том числе результатов (Saks and Yu, 2005) и (Ashlagi, et all, 2010. Предлагаемые доказательства дают четкое представление о том, как правило распределения и геометрия пространства типов влияют на (D-IC) и слабую монотонность, при этом они значительно короче существующих.

Предлагаемая в (Crowwell and Tran, 2016) характеристика также позволяет унифицировать результаты об эквивалентности доходов, такие как приведенные в (Chung and Olszewsk, 2007; Vohra, 2011). Полученная здесь характеристика эквивалентности доходов подчеркивает роль геометрии. Несмотря на то, что они менее общие, чем у (Heydenreich et all, 2009), эти результаты явно проясняют взаимодействие правил распределения с геометрией пространства типов для эквивалентности доходов. Что еще более важно, это показывает, как предположения, относящиеся к эквивалентности доходов и слабой монотонности, могут различаться и почему. Например, они создают пространства типов, для которых существуют различные реализуемые правила, которые могут быть или не быть эквивалентны доходу.

6 Аукционы

Настоящий раздел посвящен не столько тропической математике, сколько реальным фактом ее эффективного применения. Для начала стоит сказать спасибо Полу Клемпепероу за подробное описание событий, в которых он участвовал (Klemperer, 2008). Фактически он по горячим следам описал и схему аукциона и события, предшествующие проведения аукциона, организованного в конце 2007 – начале 2008 года, чтобы помочь Банку Англии справиться с кредитным кризисом, и упущенные США возможности по использованию той же схемы, но начнем с проблемы. В своей статье Клемперер не приводит полную информацию о конкретных целях и ограничениях Банка Англии. Обсуждаются не все проблемы Банка Англии, и некоторые из вопросов, которые обсуждаются, имеют незначительное значение для Банка Англии или вообще не имеют никакого значения. Более того, общее решение, которое Клемперер описывает в своей статье, содержит гораздо больше функций, чем, вероятно, потребуется Центральному банку.

6.1. Проблема

Кредитный кризис, ставший проблемой Банка Англии, начался в начале августа 2007 года с краха Northern Rock[1] в середине сентября начался осенью 2007 года. Только через несколько месяцев после начала кредитного кризиса Банк проконсультировался Клемперером, поскольку ситуация заставила.

В конце сентября и первой половине октября Банк Англии провел четыре аукциона по предоставлению банкам дополнительной ликвидности, но ни на один из них не поступило заявок (по причинам, которые Клемперер не счел нужным комментировать. Вскоре после этой неудачи банк проконсультировался с Клемперером и тот получил помощь от Джереми Бюлова и Даниэля Маршалека. Начиная с декабря, Банк проводил дополнительные простые (более успешные) аукционы, разрабатывая и рассматривая идеи, обсуждаемые здесь. После февраля 2008 года в исходных идеях практически ничего не изменилось, но сохраняющаяся нестабильность на финансовых рынках и тот факт, что простые аукционы, начавшиеся в декабре 2007 года, достигали основных целей Банка, означали, что процесс консультаций с контрагентами и т.д. начался только в октябре 2008 года.

Рисунок 6.1. Northern Rock bank (Сетябрь. 2007)
Источник – (Klemperer, 2016)

Банк срочно хотел предоставить банкам ликвидность и был готов принять более широкий спектр залогового обеспечения, чем он традиционно принимал, если это было необходимо для предоставления кредита на желаемую сумму. Но при более слабом обеспечении он хотел получить соответственно

[1] **Northern Rock** — британский банк, основанный в. 1965 году В лучшие времена расцвета банка вкладчики хранили в нём 24 миллиарда фунтов стерлингов своих средств и в нём работало до 6400 человек.

более высокую процентную ставку. Кроме того, поскольку финансовые рынки движутся быстро, любой аукцион должен был проводиться в одно мгновение – многоэтапный аукцион был исключен, так как участники торгов, которые ранее подали самые высокие ставки, могли передумать о желании стать победителями до закрытия аукциона, а также потому, что сами финансовые рынки могли подвергнуться влиянию эволюцией аукциона, увеличивающей трудности проведения торгов и провоцирует манипуляции.

Одна и та же схема эффективна для проведения аукциона с несколькими товарами-заменителями в тех случаях, когда проведение нескольких раундов аукционов невозможно. Это простой в использовании статический механизм (закрытая заявка). Но, подобно двустороннему аукциону с одновременным проведением нескольких раундов, он позволяет участникам торгов делать ставки на множественный доступ одновременно, а участникам торгов выбирать функции поставки по всем активам. Таким образом, заявки на различные активы вынуждены конкурировать друг с другом. Такая схема обеспечивает больший объем, большую эффективность, лучшую информацию и больший доход, чем проведение нескольких статических аукционов (с закрытыми ставками).

Аналогичная проблема, с которой сталкивается Банк, возникает у фирмы, которая может поставлять несколько разновидностей продукта (по разным ценам), но с общим ограничением производственных мощностей, клиентам с различными предпочтениями между этими разновидностями продукта, и где транзакционные издержки или другие временные трудности делают проведение аукционов в несколько раундов невозможным. (Многочисленные разновидности продукта могут включать разные пункты доставки, разные гарантии или разные ограничительные условия использования.) Потенциальный эффект обратной связи между финансовыми рынками и любым динамичным аукционом кажется особенно серьезным в этом контексте.

В начале 2008 года Клемперер предложил свою версию Банку Англии, проводившему консультации по этому предложению. В ходе консультаций выяснилось, что Пол Милгром независимо развивал связанные идеи.[1] В его работе (Milgrom, 2008) показывает, как очень элегантно представлять широкий спектр предпочтений участников торгов, в то же время ограничиваясь заменяемыми предпочтениями, а его высокоэффективный подход линейного программирования приводит к целочисленному распределению, когда требования и ограничения целочисленные – это свойство может быть очень полезным. важно в некоторых приложениях, даже если это не относится к такому контексту, как Банк Англии, для которого предложение Клемперер кажется более простым и прозрачным. А осенью 2008 года Клемперер, Милгром и другие сделали аналогичное предложение Казначейству США (которое могло бы принять аналогичный дизайн, если бы не отказалось от своих планов по покупке низкокачественных активов).

С аналогичной проблемой был связан план Казначейства США по программе возвращения проблемных активов (TARP)[2] осенью 2008 года, предполагалось потратить до 700 миллиардов долларов на покупку низкокачественных ценных бумаг, обеспеченных ипотекой. Как указывалось выше, волатильность финансовых рынков и их чувствительность к новостям сделали бы проведение многораундового аукциона проблематичным.

Схема, подобная принятой Банком Англии, была бы полезна и могла бы быть использована в США, если бы Министерство финансов США придерживалось своего первоначального плана потратить большую часть своего финансирования TARP в размере 700 миллиардов долларов на покупку проблемных ценных бумаг, обеспеченных ипотекой.

Джереми Бюлоу, Джон Левин, Пол Милгром и Клемперер сделали совместное предложение Министерству финансов США. Другие консультанты также предлагали статичную схему (закрытая заявка), и вполне вероятно, что была бы использована схема закрытой заявки, хотя некоторые консультанты, включая Аусубела и Крамтона (Ausubel, and Cramton, 2008), утверждали, что одновременный многораундовый аукцион был жизнеспособен, несмотря на трудности, описанные выше.

А поскольку существовало большое количество тесно связанных, но дифференцированных активов, некоторые из которых имели очень концентрированную собственность, аукцион, на котором покупатель просто заранее указывал количество каждого типа ценных бумаг для покупки, не обеспечил бы адекватной конкуренции.

Рассматриваем Центральный банк (далее “Банк”), который хочет предоставить ссуду на определенную сумму и предпочитает делать это под более качественное обеспечение и по более высоким процентным ставкам. Аукцион должен состояться в один и тот же момент времени.

Наиболее простой подход (и тот, который принят Банком Англии в ожидании разработки этих предложений) заключается в проведении отдельных аукционов с закрытыми ставками для обеспечения высокого и низкого качества.

Конечно, у такого подхода есть существенная проблема, заключающаяся в том, что Банк вынужден выбирать, какую сумму предложить под каждое обеспечение, прежде чем изучать предпочтения участников торгов. Кроме того, участники торгов хотели бы выяснить разницу между расчетными ценами различных аукционов перед началом торгов, но не могут этого сделать и вместо этого вынуждены строить

[1] Поэтому позже они работали вместе с Министерством финансов США

[2] Troubled Asset Relief Program

предположения о том, какой аукцион предложит им наилучшую стоимость[1]. Таким образом, результаты непредсказуемы и неэффективны: средства вряд ли достанутся тем, кто их больше всего ценит, а те участники торгов, которые их выиграют, могут быть неэффективно распределены между залоговыми активами.

Кроме того, когда средства под отдельные залоги выставляются на аукцион отдельно, предложения, сделанные под одно обеспечение, не обеспечивают конкурентной дисциплины по отношению к предложениям, сделанным под другие залоги. Таким образом, каждый отдельный аукцион более чувствителен к влиянию рынка, манипуляциям и информационной асимметрии, чем если бы предложения всех участников торгов напрямую конкурировали друг с другом на одном аукционе. Процентные ставки (т.е. доходы участников торгов) соответственно, как правило, ниже.

Эти проблемы также снижают ценность аукционов как источника информации для Банка и других участников рынка. Те же проблемы могут также привести к снижению участия в аукционах, что создает эффект обратной связи "второго раунда", который еще больше усугубляет проблемы.

Короче говоря, прямолинейный подход приводит к плохим результатам как для участников торгов, так и для того, кто их принимает. Решение, предложенное Полом Клемперером, позволило реешить эти проблемы.

6.2. Решение

Предложение по своей концепции простое: разрешить каждому контрагенту (участнику торгов) предлагать один или несколько пакетов предложений; каждый пакет содержит Предложение о процентной ставке для одного или нескольких залогов, и предложения в каждом пакете являются взаимоисключающими. Участник торгов (Банк) просматривает все пакеты заявок и затем выбирает свои предпочтительные процентные ставки (отдельную единообразную ставку для каждого обеспечения) в соответствии с некоторым заранее установленным (но не обязательно объявленным заранее) правилом. [2]

Из каждого пакета заявок, предложенных каждым участником торгов, Банк принимает ту, которая дает участнику торгов наибольший профицит, оцененный по этим процентным ставкам[3] (или не делает ставку, если все заявки дали отрицательный профицит).

Идея состоит в том, чтобы позволить Банку изучить спрос, прежде чем выбирать, какую сумму предложить под каждое обеспечение, в то же время позволяя каждому участнику торгов достичь наилучшего возможного результата, учитывая процентные ставки, которые Банк фактически выбирает. (Делая условные ставки, участники торгов, по сути, могут решить, сколько и под какое обеспечение брать взаймы, ознакомившись с выбранными процентными ставками.)

Вопрос, конечно, в том, действительно ли это может быть реализовано и может ли это быть сделано простым и надежным способом, а также достаточно легким для того, чтобы участники торгов поняли, что они рады участвовать. Сейчас мы покажем, что это осуществимо. Мы начнем с иллюстрации простого подхода, аналогичного тому, который Клемперер предложил Банку Англии, прежде чем обсуждать диапазон возможностей.

6.3. Простой аукцион для двух товаров

Предположим, существует только два класса залога: "сильный" и "слабый".[4] Каждому участнику торгов (контрагенту) разрешается сделать несколько заявок на участие в аукционе. Каждая ставка рассчитана на определенную сумму денег и включает в себя две процентные ставки. Одна ставка — это та, которую контрагент готов платить, если он берет взаймы под надежное обеспечение; а другая относится к заимствованию под слабое обеспечение. Эти два результата были бы взаимоисключающими. Если контрагент имеет или желает использовать только один тип обеспечения, ему разрешается предложить нулевую процентную ставку для другого типа обеспечения, который он не может или не будет использовать – это гарантирует, что нежелательное обеспечение никогда не будет выбрано из этого предложения. Так, например, участник торгов мог бы предложить занять 375 миллионов фунтов стерлингов под 5,95%, если бы ему было разрешено использовать слабое обеспечение, и 5,7%, если бы требовалось

[1] Рассмотрим, например, контрагента, который хочет, скажем, 300 миллионов фунтов стерлингов. Должен ли он предлагать 300 миллионов фунтов стерлингов под каждый вид обеспечения и рисковать тем, что ему будет выделено 600 миллионов фунтов стерлингов? Или, чтобы избежать этого риска, должен ли он предложить 300 миллионов фунтов стерлингов под один вид обеспечения, но не под другой? Тогда он мог бы увидеть выделение денег под другой вид обеспечения по ставке, которую он была бы готов заплатить. Или ему следует предложить по 150 миллионов фунтов стерлингов за каждый? Что бы он ни делал, впоследствии он может пожалеть о том, что взял кредит под неправильный тип обеспечения, учитывая рыночные ставки клиринга, и/или взял слишком много или слишком мало, учитывая рыночные ставки клиринга. (Проблема не зависит от того, используется ли единообразное или дискриминационное ценообразование.)

[2] Центральный банк обладает достаточным институциональным авторитетом, чтобы от него нельзя было ожидать стратегического поведения, если бы он заранее не объявил о своем правиле.

[3] Если ставки равны, Банк может выбрать, какую ставку принять. Если ставка с наибольшим профицитом дает нулевой профицит, Банк может выбрать, какую долю (доли) принять.

[4] "Сильный" может соответствовать “ОМО" или "обычному" обеспечению, которое Банк Англии традиционно принимал в своих "операциях на открытом рынке". "Слабый" может соответствовать "более широкому" или "расширенному" обеспечению, под которое Банк Англии был готов предоставить кредит в напряженных обстоятельствах, сложившихся с осени 2007 года.

использовать сильное обеспечение. Он мог бы сделать повторную заявку на получение дополнительного займа в размере 500 миллионов фунтов стерлингов под 5,75%, если бы мог использовать слабое обеспечение, и 5,5%, если бы ему пришлось использовать сильное обеспечение. Он может сделать третью заявку на получение займа в размере 300 миллионов фунтов стерлингов под слабое обеспечение под 5,7% и 0% под сильное обеспечение (что будет расценено как отказ от займа под сильное обеспечение в рамках этой конкретной заявки). Каждое из этих предложений было бы истолковано как Предложение "или" в том смысле, что Банк принял бы самое большее одно из двух предложений, а именно то, которое дает заемщику более выгодную сделку с точки зрения разницы между ставкой, предлагаемой заемщиком, и ставкой клиринга на рынке – это избавляет участника торгов от необходимости беспокоиться о том, что одна из его заявок победит другую, которую он предпочел бы видеть принятой.

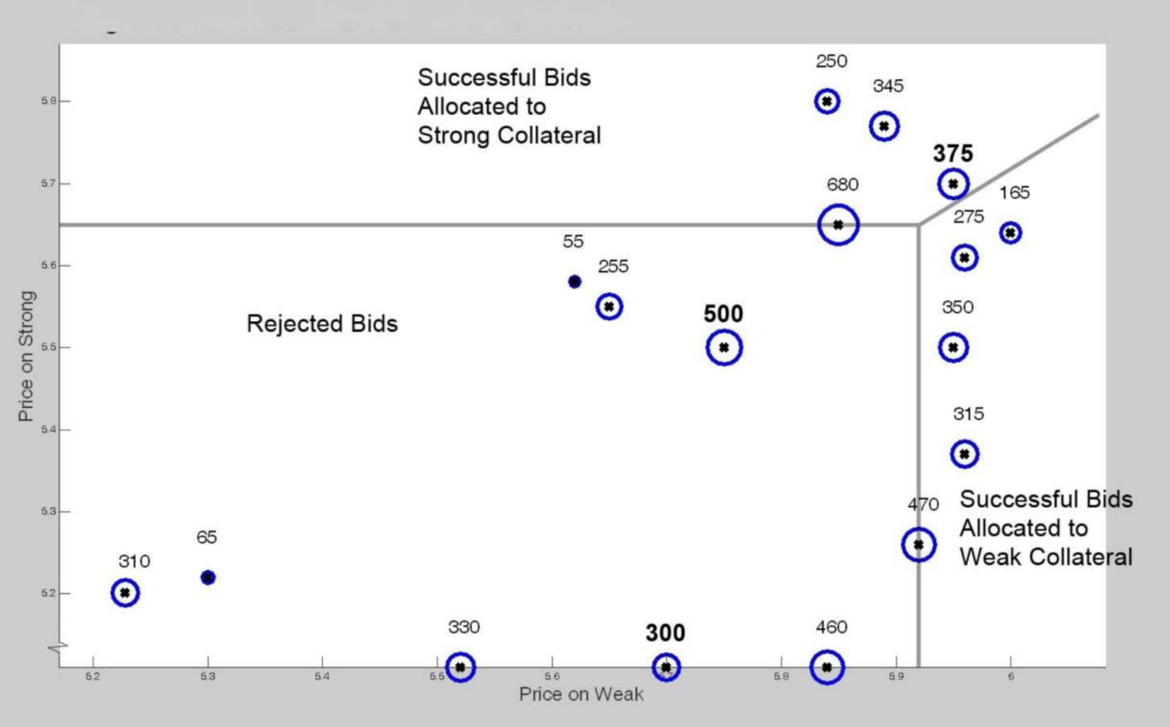


Рисунок 6.2. Возможное распределение средств
Источник – (Klemperer, 2008)

Пример совокупности заявок, поданных всеми участниками торгов, проиллюстрирован на рисунке 6.2. выше. Ставки с сильным обеспечением отображаются вертикально, а ставки со слабым обеспечением – горизонтально, так что каждая точка на графике представляет парную ставку. [1] (Число рядом с каждой точкой – это сумма ставки в миллионах фунтов стерлингов.) Три заявки, описанные в предыдущем абзаце, пронумерованы жирным шрифтом. (Обратите внимание, что вертикальная ось рисунка "сломана", так что ставки на 330 млн фунтов стерлингов, 300 млн фунтов стерлингов и 460 млн фунтов стерлингов рассчитаны на 0% при сильном обеспечении, т.е. эти ставки эквивалентны традиционным "непарным" ставкам только при слабом обеспечении.)

Если, например, Банк желает предоставить кредит в размере 2,5 млрд фунтов стерлингов, а в заявках на получение кредита в общей сложности 5,5 млрд фунтов стерлингов, то заявки на сумму 3 млрд фунтов стерлингов должны быть отклонены. Какие именно 3 миллиарда фунтов стерлингов будут отклонены, будет определяться правилом, которое Банк решил использовать при предоставлении средств. Возможными пакетами исключенных заявок были бы любые наборы заявок, включенные в прямоугольник, нарисованный с двумя сторонами вдоль осей и охватывающий заявки на сумму 3 миллиарда фунтов стерлингов. Каждый возможный прямоугольник однозначно идентифицируется парой процентных ставок, соответствующих правому верхнему углу прямоугольника; ставки выше любой из этих "предельных" процентных ставок принимаются, в то время как ставки ниже обеих предельных ставок отклоняются. На рисунке 5.2. показана одна возможная пара ставок отсечения, обозначенная вертикальной линией на уровне 5,92% (для слабого обеспечения) и горизонтальной линией на уровне 5,65% (для сильного обеспечения). Заявки внутри прямоугольника отклоняются, а остальные принимаются.

[1] Поскольку все слабые ставки выше, чем сильные, все графики опускаются ниже линии 45° – это особенность примера с Центральным банком и не имеет значения для схемы аукциона.

Те заявки, для которых оба предложения превышают соответствующие ставки отсечения (то есть те заявки, которые находятся к северо-востоку от прямоугольника), распределяются на обеспечение, для которого ставка отсечения еще ниже предложения. Таким образом, заявки, которые находятся как к северу от прямоугольника, так и к северо-западу от диагональной линии под углом 45°, проведенной от правого верхнего угла прямоугольника, получают кредиты под сильное обеспечение; заявки, которые находятся как к востоку от прямоугольника, так и к юго-востоку от диагональной линии, получают кредиты под слабое обеспечение.

Банк использует единое правило ценообразования для каждого залогового обеспечения. Таким образом, все заявки, принятые под сильное обеспечение, выплачивают одинаковую минимальную процентную ставку (отсечение) по сильному обеспечению, а все заявки, принятые под слабое обеспечение, выплачивают процентную ставку по слабому обеспечению.

Конечно, на рисунке 6.2. показана только одна из множества возможных пар ставок отсечения, которые отклонили бы заявки ровно на 3 миллиарда фунтов стерлингов. Если мы проведем линию под углом 45° через любую точку графика, в которой разница между процентными ставками не слишком велика, то, как правило, на этой линии под углом 45° будет одна точка, в которой отклоняются заявки ровно на 3 миллиарда фунтов стерлингов[1]. (Если есть более одной точки, мы выбираем наиболее юго-западную, возможны другие правила выбора.) По мере того, как мы перемещаем линию на 45° на юго-восток (относительно более высокие процентные ставки при слабом залоге), критическая точка, представляющая пару предельных ставок, перемещается либо вниз, либо вправо. Все возможные пары соединены ступенчатой линией с наклоном вниз на рис. 6.3.

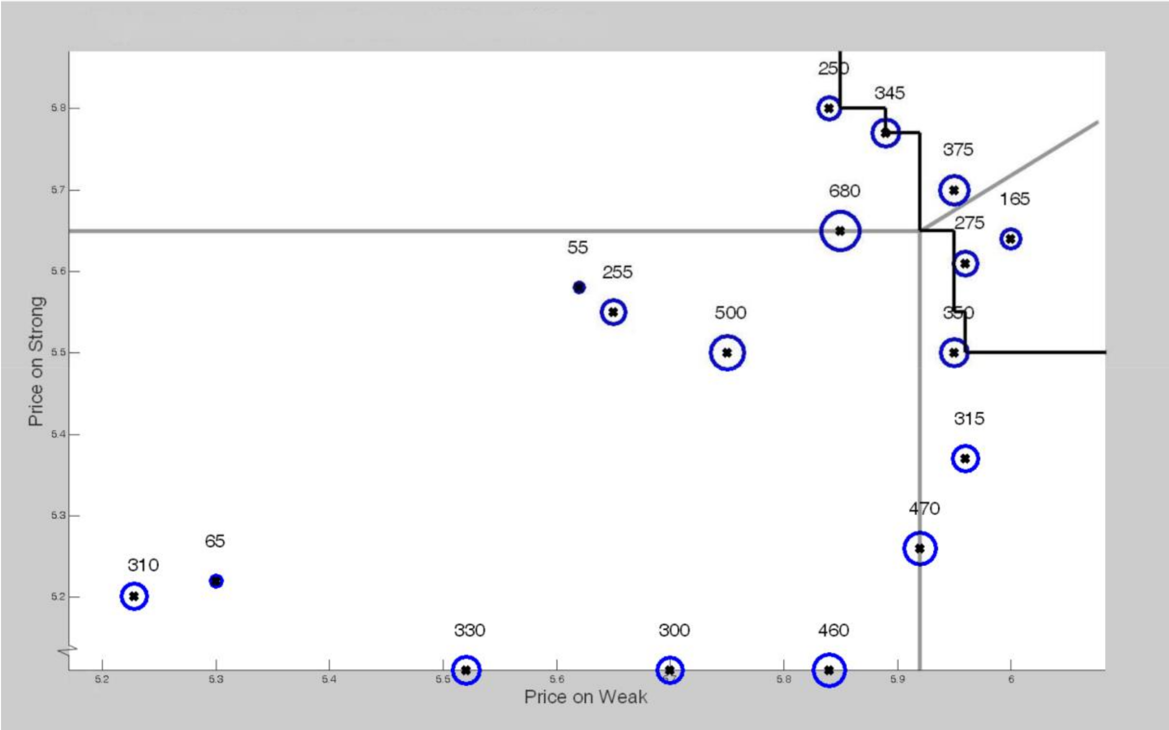


Рисунок 6.3. Допустимые пары предельных значений

Источник – (Klemperer, 2008)

Каждая возможная пара отсечек на ступенчатой линии рисунка 6.3. подразумевает как разницу в процентных ставках, так и (путем суммирования принятых заявок ниже соответствующей линии под углом 45°) долю средств, выделенных на слабое обеспечение. По мере увеличения разницы в процентных ставках доля, выделяемая на слабое обеспечение, уменьшается. Используя эту информацию, мы можем построить нисходящую "кривую спроса" (ступенчатая линия) на рис. 6.3.

(Обратите внимание, что оси на рисунке 6.3 отличаются от осей на рисунке 6.2.)

Банк может по своему усмотрению выбрать любую точку на "кривой спроса" (эквивалентно, любой возможный прямоугольник на рисунках 6.2, 6.3.) после просмотра заявок.

[1] Если ровно 3 миллиарда фунтов стерлингов заявок могут быть отклонены путем отклонения целых заявок (эквивалентно, сумма, подлежащая принятию, может быть составлена из целых заявок), то, как правило, будет промежуток между последней отклоненной заявкой и первой принятой заявкой. Однако обычно предельные ставки будут нормированы, поэтому предложение будет равно спросу только в одной точке на любой линии под углом 45°.

7. Эпилог

Завершая обзор событий в области применения тропической математики в экономике, хочется поделиться собственными впечатлениями от работы с текстами. В особенности это касается текстов, с авторами которых лично знаком, причем достаточно давно. В частности, это касается В.И. Данилова, Г.А. Кошевого, В.Л. Макарова, А.Г. Хованского, а также ряда ленинградских авторов.

В последующие годы тропическая математика интенсивно развивалась по нескольким направлениям в работах зарубежных и российских ученых, в результате чего появились многочисленные научные статьи, опубликованные в ведущих научных журналах, и несколько десятков монографий. Тем не менее применений идемпотентной математики в экономике почти нет.

Парадоксальность ситуации заключается в том, что экономистам практически невозможно читать тексты, написанные математиками. Даже в тех случаях, когда математики пытаются просто объяснить, что такое многогранник Ньютона (Казарновский, Хованский, Эстеров, 2021), получается длинно, не очень понятно (даже математику из другой области). А сами математики прикладных задач обычно чураются. В среде математиков был и остается снобизм, мешающий заниматься приложениями. Таким был великий англичанин Г. Х. Харди таким же и наш Юрий Иванович Манин, учениками которого являются В.И. Данилов и А.Г. Кошевой. Они, как и автор настоящего обзора, начинали моделирования общего равновесия в экономике знаний или аналогичных продуктов, подчиняющихся правилам идемпотентного сложения. В их интерпретации знания дискретны, акцентировать внимание можно было на идемпотентности или на дискретности. Они акцентировали дискретность и ушли в чистую математику, тогда как в работах (Козырев, 2011, 2020, 2021, 2024, акцент сделан на идемпотентности самих продуктов и связи с реальностью в ущерб математической технике.

О снобизме математиков можно почитать в книге В.И. Арнольда (Арнольд, 2002) о математике и математиках теперь уже прошлого тысячелетия. Впрочем, и сам Владимир Игоревич, посмеиваясь над снобами, не считал прикладную математику (отдельной) наукой. Для него применение одной и той же математической техники в разных областях не казалось наукой, а зря. Практика показывает, что для реального успеха надо понимать и математику, и предмет, причем глубоко.

Литература

1. Арнольд В.И. (2002) Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2002.— 104 с. ISBN 5-94057-090-9
2. Воробьев Н. Н. (1963) Экстремальная алгебра матриц. Доклады Академии наук СССР. Математика, информатика, процессы управления 152 (1), 24–27 (1963).
3. Воробьев Н. Н. (1967) Экстремальная алгебра положительных матриц. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 3 (1), 39–72 (1967).
4. Воробьев Н. Н. (1970) Экстремальная алгебра неотрицательных матриц. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 6 (4/5), 303–312 (1970).
5. Данилов В. И. (2025), “Введение в теорию выбора и стабильных контрактов”, УМН, 80:4(484) (2025), 3–46; Russian Math. Surveys, 80:4 (2025), 549–590
6. Данилов В. И. (2015), Заменимость и дополнительность товаров в терминах функций полезности // Экономика и математические методы. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 25–36.
7. Данилов В.И., Кошевой Г.А. (2009) Экономики с инновационными товарами (с Кошевым ГА.), Экономика и математические методы, 2009, 45(1). [251 kB]
8. Данилов В.И., Кошевой Г.А. (2004) Дискретная выпуклость // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2004. Т. 312. № 11. С. 86–93.
9. Данилов В.И., Кошевой Г.А., Сотсков А.И. (1993) Экономическое равновесие на рынке интеллектуальных продуктов // Экономика и математические методы. 29, вып. 4, 1993, С.606-616.
10. Данилов В.И., Кошевой Г.А., Ланг К. (2013) Равновесия на рынке неделимых товаров // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. № 2 (18). С. 10–34.
11. Данилов В.И., Кошевой Г.А., (2003) Дискретная выпуклость и эрмитовы матрицы, Труды математического института им. Стеклова, vol. 241, Москва, Наука, 2003, 68–89 [334 kB]
12. Данилов В.И., (2000) Целочисленная выпуклость Труды семинара И. Р. Шафаревича Второй выпуск, Москва, 2000, 448–66 [251 kB] 4
13. Дудников П. С., Самборский С. Н. (1991), “Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 93–109; *Math. USSR-Izv.*, 38:1 (1992), 91–105.
14. Галушка А. С., Ниязметов А. К., Окулов М. О. (2021). Кристалл роста к русскому экономическому чуду. М.: Наше Завтра. [Galushka A. S., Niyazmetov A. K., Okulov M. O. (2021). Growth crystal to the Russian economic miracle. Moscow: Nashe Zavtra. (In Russian).]
15. Казарновский Б. Я., Хованский А. Г., Эстеров А. И., Успехи математических наук, 2021, Том 76, выпуск 1(457), сс. 95–190 DOI: https://doi.org/10.4213/rm9937
16. Козырев А.Н. Совместимость стимулов и двойственность в условиях неполной информации // Цифровая экономика № 4(34), 2025 – с. 5–17. DOI: 10.34706/de-2025-03-01 10.34706/DE-2025-04-01

17. Козырев А. Н. Цифровая экономика и экономика данных // Цифровая экономика № 2(28), 2024 – с. 5–13. DOI: 10.33276/de-2024-02-01
18. Козырев А. Н. Экономика данных, обучение нейросетей и многомерная геометрия// Цифровая экономика № 3(29), 2024 – с. 5–13. DOI: 10.34706/de-2024-03-01
19. Козырев А.Н. Моделирование НТП, тропическая математика и цифровая экономика", глава 53, с. 463–485. Монография "Российская социально-экономическая Система: реалии и векторы развития". 4-е издание, переработанное и дополненное. Отв. редакторы Р.С. Гринберг, П.В. Савченко. М.: ИНФРА-М, 2021. – 596 с. ISBN 978-5-16-016215-7
20. Козырев А.Н. Совместимость стимулов, цифровизация и торговля знаниями// Цифровая экономика № 1(9), 2020 – с. 5–20, DOI: 10.34706/DE-2020-01-01
21. Козырев А.Н. Современное состояние исследований в области торговли информацией// Цифровая экономика № 1(9), 2020 – с. 63–75, DOI: 10.34706/DE-2020-01-07
22. Козырев А.Н. Оптимизация размещения взаимосвязанных НИОКР на основе двойного аукциона //Экономика и математические методы//ЭММ, ТОМ 55, ВЫПУСК 1, 2019, с. 32-42 DOI: 10.31857/S042473880004026-7
23. Козырев А.Н. Моделирование НТП, упорядоченность и цифровая экономика// Экономика и математические методы, т. 47, № 4, 2011 г. Козырев А.Н. (1999) Алгебраические свойства информации и рынок. Научно-техническая информация. сер.1, 1999, № 5. 6с.
24. Козырев А.Н. (1989) Рынок программного обеспечения в СССР, лицензионные и авторские договоры, цены. Мир ПК № 3. – 1989, М.: Радио и связь & IDG communications. 7с.
25. Козырев А.Н. (1989) Общее равновесие в экономике с рынками лицензий и продуктов. Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара “Социально-экономические процессы”, Кишинёв, 1989. 2с.
26. Кондраков И. А., Шананин А. А. (211), Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах и их приложения к анализу экономической информации, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 2, 188–205.
27. Корбут А. А. (1965) Экстремальные пространства. Доклады Академии наук СССР. Математика, информатика, процессы управления 164 (6), 1229–1231.
28. Корбут А. А. (1972) Экстремальные векторные пространства и их свойства. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 8 (8/9), 525–536.
29. Крайнов Д.Е., Матвеенко В.Д. (2006) Модель эндогенного роста в инновационной экономике
30. Кривулин Н. К. (2025) Модели и методы тропической алгебры в задачах оптимизации и исследования операций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70). Вып. 3. С. 444–473.
31. Кривулин Н. К., Губанов С. А. (2016) Решение задачи сетевого планирования на основе методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 62–72. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.306
32. Кривулин Н. К. (2009) Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.
33. Кривулин Н. К., Агеев В. А. Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2019. — №4. — Р. 472–488.
34. Кривулин Н.К. и др. (2024) Решение многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений / Кривулин Н. К., Булгакова Д. С., Григорьев Д. А., Нагуманова К. И., Приньков А. С., Салова Я. А., Филатова А. А. // Компьютерные инструменты в образовании. — 2024. — №2. — Р. 5–29.
35. Крайнев Д.Е., Матвеенко В.Д. Модель эндогенного роста в инновационной экономике с.294-297
36. Литвинов Г. Л., Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2005, том 326, 145–18.
37. Литвинов Г. Л., Соболевский А. Н., (2000) Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и полиномиальная сложность задач интервальной идемпотентной линейной алгебры. — Докл. РАН 374 (2000), no. 2, 304–306.
38. Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз , Г. Б. Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход. — Докл. АН СССР 363 (1998), no. 3, 298-300.
39. Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз , Г. Б. з, Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход. — Мат. заметки 65 (1999), no. 4, 572-585.
40. Литвинов Г. Л., Шпиз , Г. Б., Ядерные полумодули и теоремы о ядре. Алгебраический подход. — Докл. АН СССР 386 (2002), no. 3, 300—303.
41. Макаров В.Л. (1973) Баланс научных разработок и алгоритм его решения // Сб.ст. Оптимизация, Новосибирск, 1973, вып.11(28),37-45.

42. Макаров В. Л. (2003). Экономика знаний: уроки для России // Вестник Российской академии наук. Т. 73, № 5. С. 450—460. [Makarov V. L. (2003). Knowledge economy: Lessons for Russia. Vestnik Rossiyskoy Akademii Nauk, Vol. 73, No. 5, pp. 450—460. (In Russian).]
43. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
44. Матвеенко В.Д., Нев О.А. (2012) Игровая модель приращения знаний
45. Романовский И. В. (1959) Ободной теореме Р. Белмана. Теория вероятностей и ее применения 4 (4), 456–458.
46. Романовский И. В. (1964) Асимптотика рекуррентных соотношений динамического программирования и оптимальное стационарное управление. Доклады Академии наук СССР. Математика, информатика, процессы управления 157 (6), 1303–1306 (1964).
47. Романовский И. В. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом. Кибернетика и системный анализ 3 (2), 66–78 (1967).
48. Тиморин В. А., Хованский А. Г., “Многогранники и уравнения”, Матем. просв., сер. 3, 14, Изд-во МЦНМО, М., 2010, 30–57 [34] 154.
49. Шпиз Г. Б., (2000) Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полу-полях. — Усп. мат. наук 55 (2000), по. 5, 185—186.
50. Яковлев Д. М., Кривулин Н. К. (2025) Решение многокритериальной задачи определения приоритетов дорожных работ. Избранные труды весенней научно-практической конференции по вопросам информатики, математики, механики и астрономии «Мат-мех. Наука 2025» 28 апреля – 3 мая 2025 г. Санкт-Петербург С. 63–73
51. Armantier, O., Krieger, S. and McAndrews J. (2008). “The Federal Reserve’s Term Auction Facility.” Current Issues in Economics and Finance, Federal Reserve Bank of New York, 14 (5), July
52. Ashlagi, I. Braverman, M., Avinatan, H., Monderer D. (2010) Monotonicity and implementability. Econometrica, 78(5):1749–1772, 2010.
53. Ausubel, L., and Cramton P. (2008). “A Troubled Asset Reverse Auction.” Mimeo, University of Maryland.
54. Back, K., and Zender, J. (2001). “Auctions of Divisible Goods With Endogenous Supply.” Economics Letters, 73, 29-34.
55. Baldwin, E. and Klemperer, P. (2014) Tropical geometry to analyse demand. Working paper, University of Oxford
56. Baldwin, E. and Klemperer, P. (2019). Understanding preferences: “Demand types,” and the existence of equilibrium with indivisibilities. Econometrica 87 (3), 867–932. Candogan, O., A. Ozdaglar, and P. A. Parrilo (2015). Iterative auction design for tree valuations. Operations Research 63 (4), 751–771.
57. Baldwin, E., Goldberg, P.W., Klemperer, P., E Lock (2024a) Solving strong-substitutes product-mix auctions Mathematics of Operations Research 49 (3), 1502-1534, 2024
58. Baldwin, E., Bichler M, Fichtl, M., Klemperer, P. (2034b) Implementing Walrasian Equilibrium: The Languages of Product-Mix Auctions E Baldwin, P Klemperer, E Lock Available at SSRN 4931623, 2024
59. Baldwin, E., Klemperer, P. (2024b) Strong substitutes: structural properties, and a new algorithm for competitive equilibrium prices Mathematical Programming 203 (1), 611-643, 2024
60. Baldwin, E., R Jagadeesan, Klemperer, P., A Teytelboym The equilibrium existence duality Journal of Political Economy 131 (6), 1440-1476, 2023
61. Baldwin, E., R Jagadeesan, Klemperer, P., A Teytelboym On Consumer Theory with Indivisible Goods Working Paper, 2021
62. Baldwin, E., Klemperer, P. Proof that the strong substitutes product-mix auction bidding language can represent any strong substitutes preferences
63. Baldwin, E., Edhan, O., Jagadeesan, R., Klemperer, P., Teytelboym A. The equilibrium existence duality: Equilibrium with indivisibilities & income effects arXiv preprint arXiv:2006.16939, 2020
64. Baldwin, E.,.Y. Cai,, Kuralbayeva K. (2020) To build or not to build? Capital stocks and climate policy* Journal of Environmental Economics and Management 100, 102235, 2020
65. Baldwin, E., Klemperer, P. Understanding Preferences: “Demand Types”, and the Existence of Equilibrium with Indivisibilities
66. Baldwin, E., Klemperer, P. (2014) The multidimensional product-mix auction preparation, c, 2014
67. Binmore, K. and Klemperer P. (2002). “The Biggest Auction Ever: the Sale of the British 3G Telecom Licenses”, Economic Journal, 112, C74-C96.
68. Bulow, J., and Klemperer P. (1996). “Auctions versus Negotiations.” *American Economic Review,* 86, 180-194.
69. Bulow, J., and Roberts J. (1989). “The Simple Economics of Optimal Auctions.” *Journal of Political Economy,* 97, 1060-1090.
70. Chambers, C. P., and Echenique F. (2017). A characterization of combinatorial demand. Mathematics of Operations Research 43 (1), 222–227. Kim-Sau Chung and Wojciech Olszewski. A non-differentiable approach to revenue equivalence. Theoretical Economics, 2(4):469-487, 2007.

71. Chung K.-S., and Olszewski W. (2007) A non-differentiable approach to revenue equivalence. *Theoretical Economics*, 2(4):469-487, 2007.
72. Crowell, R. A., and Ttran, M. (2016) Tropical geometry and mechanism design https://arxiv.org/pdf/1606.04880v1
73. Crowell, R. A., and Ttran, M. (2018) Tropical geometry and mechanism design https://arxiv.org/pdf/1606.04880
74. Cuninghame-Green, R. A.. Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour. OR, 13(1):95—100, 1962.
75. Danilov, V., G. Koshevoy, and C. Lang (2003). Gross substitution, discrete convexity, and submodularity. Discrete Applied Mathematics 131(2), 283–298.
76. Danilov, V., G. Koshevoy, and K. Murota (2001). Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money. Mathematical Social Sciences 41(3), 251–273.
77. Danilov, V., G. Koshevoy G. A., and A. I. Sotskov A. I. (1997) Equilibrium analysis of an economy with innovations (with G. A. Koshevoy and A. I. Sotskov), Journal of Mathematical Economics, 1997, 27, 195-226.
78. Develin M. and Sturmfels, B. (2004) Tropical convexity. Doc. Math, 9:1–27, 2004.
79. Gorman, W. M. (1976): “Tricks With Utility Functions,” in Essays in Economic Analysis, ed. by M. J. Artis and A. R. Nobay. Cambridge: Cambridge University Press, 211–243. [885]
80. Greenberg, J. and S. Wtber (1986): “Strong Tiebout Equilibrium Under Restricted Preferences Domain,” Journal of Economic Theory, 38 (1), 101-117. [885]
81. Grishukhin, V., Danilov, V., AND Koshevoy, G. (2010): “Unimodular Systems of Vectors Are Embeddable in the (0,1)-Cube,” Mathematical Notes, 88 (6), 891-893. [910]
82. Gul, F. and E. Stacchetti (1999). Walrasian equilibrium with gross substitutes. Journal of Economic Theory 87 (1), 95–124.
83. Gul, F. and E. Stacchetti (2000). The English auction with differentiated commodities. Journal of Economic Theory 92(1), 66–95.
84. Ellison, Glenn, Drew Fudenberg, and Markus Mobius (2004). “Competing Auctions.” Journal of the European Economic Association, 2, 30-66.
85. Hatfield, J. W. and P. Milgrom (2005). Matching with contracts. American Economic Review 95 (4), 913–935.
86. Heydenreich, B., Mu¨ller, R., Uetz, M. and Vohra R. V. (2009) Characterization of revenue equivalence. *Econometrica*, 77(1):307–316, 2009.
87. Joswig, M., and Kulas K. (2010) Tropical and ordinary convexity combined. Advances in geome-try, 10(2):333–352, 2010.
88. Joswig M., and Loho, G. (2016) Weighted digraphs and tropical cones. Linear Algebra and its Applications, 501:304 – 343, 2016.
89. Kastl, Jakub (2008). “Discrete Bids and Empirical Inference in Divisible Good Auctions.” Working paper, Stanford University.
90. Kelso, A. S. and V. P. Crawford (1982). Job matching, coalition formation, and gross substitutes. Econometrica 50(6), 1483–1504.
91. Korkine, A. and G. Zolotareff (1877). Sur les formes quadratiques positives. Mathematische Annalen 11(2), 242–292.
92. Kirillov A. N. (2001), Introduction to tropical combinatorics. — In: A. N. Kirillov and N. Liskova (Eds.), Physics and Combinatorics 2000, Proc. of the Nagoya 2000 Intern. Workshop, World Scientific, (2001), pp. 82-150.
93. Kleene S. C. (1956) Representation of events in nerve sets and finite automata. — In: J. McCarthy and C. Shannon (Eds), Automata Studies, Princeton University Press, Princeton, 1956, pp. 3—40
94. Klemperer, P. (1999). “Auction Theory.” Journal of Economic Surveys, 13(2): 227-86.
95. Klemperer, P. (2002). “What Really Matters in Auction Design.” Journal of Economic Perspectives, 16(1): 169-189.
96. Klemperer, P. (2004). Auctions: Theory and Practice, Princeton University Press, Princeton, US.
97. Klemperer, P. (2006). “Answer to Oxford University Economic Theory 2006 Examination.” part A4, http://www.nuffield.ox.ac.uk/users/klemperer/OtherTeachingMaterials/2008auctionsolutions.pdf .
98. Klemperer, P.l (2007). “Bidding Markets.” Journal of Competition Law and Economics, 3, 1-47.
99. Klemperer, P. and Margaret Meyer (1989). “Supply Function Equilibria in Oligopoly under Uncertainty,” Econometrica, 57, 1243-1277.
100. Kremer, Ilan, and Kjell Nyborg (2004a). “Underpricing and Market Power in Uniform Price Auctions.” Review of Financial Studies, 17, 849-877.
101. Kremer, Ilan, and Kjell Nyborg (2004b). “Divisible Good Auctions - The Role of Allocation Rules.” Rand Journal of Economics, 35, 147-159.
102. Krishna, Vijay (2002). Auction Theory. New York, NY: Academic Press, US.
103. Krivulin N. K. (2024) Application of tropical optimization for solving multicriteria problems of pairwise comparisons using log-Chebyshev approximation // Int. J. Approx. Reason. — 2024. — Vol. 169. —

P. 109–168. Shioura, A. and Z. Yang (2015). Equilibrium, auction, and generalized gross substitutes and complements. Journal of the Operations Research Society of Japan 58(4), 410–435
104. LiCalzi, M.., and Pavan A. (2005). “Tilting the supply schedule to enhance competition in uniform-price auctions.” European Economic Review, 49, 227-250.
105. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications, (IHES/M/95/33).— Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette (1995). Also see arXiv:math.GM/0101021.
106. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Idempotent mathematics: correspondence principle and applications. — Russian Mathematical Surveys 51 (1996), no. 6, 1210— 1211.
107. Litvinov G. L. and Maslov V. P., The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications. — In [69], 420—443.
108. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications, (IHES/M/95/33).— Institut des Haut Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette (1995). Also see arXiv :math. GM/010102
109. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Idempotent mathematics: correspondence principle and applications. — Russian Mathematical Surveys 51 (1996), no. 6, 121* 1211.
110. Litvinov G. L. and Maslov V. P., The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications. — In [69], 420—443.
111. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications, (IHES/M/95/33).— Institut des Haut Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette (1995). Also see arXiv :math. GM/010102
112. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Idempotent mathematics: correspondence principle and applications. — Russian Mathematical Surveys 51 (1996), no. 6, 121* 1211.
113. Litvinov G. L. and Maslov V. P., The correspondence principle for idempote calculus and some computer applications. —420—443. In J. Gunawardena (Ed.), Idempoiency. — Publ. of the Newton Institute, Vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
114. Litvinov G. L. and Maslov V. P. (Eds.), Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. — Contemporary Mathematics 377, AMS, Providence, RI (2005).
115. Litvinov G. L. and Maslov V. P., Universal numerical algorithms and their software implementation. — Programming and Computer Software 26 (2000), no. 5, 275—280. Also see arXiv :math. SC/0102114.
116. Litvinov G. L. and Maslov V. P., and Rodionov, A. Ya. A unifying approach to software and hardware design for scientific calculations and idempotent mathematics. — International Sophus Lie Centre, Moscow (2000). Also arXiv:math.SC/0101069. подход. — Мат. заметки 69 (2001), по. 5, 758-797.
117. Litvinov G. L. and Maslov V. P., and Shpiz G. B., Idempotent (asymptotic) analysis and the representation theory. — In: V. A. Malyshev and A. M. Vershik (Eds.), Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics. Kluwer Academic Publ., Dordrecht (2002), p. 267—278. Also arXiv:math. RT/0206025.
118. Litvinov G. L., Shpiz G. B., (2005) The dequantization transform and generalized Newton polytopes. — In [Idempotent Mathematics and Mathematical Physics» (eds. G. L. Litvinov, V. P. Maslov)], 181—186.
119. Litvinov G. L. and Sobolevskii A. N. (2001), Idempotent interval analysis and optimization problems. — Reliable Computing 7 (2001), no. 5, 353—377. Also arXiv:math.SC/0101080.
120. Mas-Colell, M. Whinston, D. and Green, J. R. (1995) *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, June 1995.
121. Matveenko V. (1995) Development with positive externalities: the case of the Russian economy// Journal of Policy Modeling. — Vol. 17, 1995. — № 3. — P. 207–221.
122. Matveenko V., (2011) Anatomy of production function: a technological menu and a choice of the best technology, Economics Bulletin, vol. 30, 2011, pp. 1906-1913.
123. Matveenko V., (2012) Powers of matrices with an idempotent operation and an application to dynamics of spatial agglomerations, In: G.L. Litvinov, V.P. Maslov, A.G. Kushner and S.N. Sergeev, eds. Tropical and idempotent mathematics. Moscow: French-Russian Laboratory “J.-V.Poncelet”, 2012, pp. 149–155
124. Matveenko, V. (2014) Tropical support sets in analysis of weak links and complementarity
125. Maclagan, D. and Sturmfels, B. (2015) Introduction to Tropical Geometry: Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2015
126. McAdams, D. (2007). “Uniform-Price Auctions with Adjustable Supply.” Economics Letters, 95, 48-53.
127. Menezes, F. M. and Paulo K. Monteiro (2005). An Introduction to Auction Theory. Oxford, UK: Oxford University Press.
128. Mikhalkin G. (2004) Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces. Topology, 43(5):1035-1065, 2004.
129. Mikhalkin G. (2005) Enumerative tropical algebraic geometry in R2. Journal of the American Mathematical Society, 18(2):313-377, 2005.

130. Milgrom, P. and Strulovici, B. (2009). Substitute goods, auctions, and equilibrium.Journal of Economic Theory 144(1), 212–247.
131. Milgrom, P. (2000). “Putting Auction Theory to Work: The Simultaneous Ascending Auction.” Journal of Political Economy, 108, 245-272.
132. Milgrom, P. (2004). Putting Auction Theory to Work. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
133. Milgrom, P. (2008). “Assignment Messages and Exchanges.” Working paper, Stanford University.
134. Muruta, K., and Shiura, A. (1999): “M-Convex Function on Generalized Polymatroid,” Mathe-matics of Operations Research, 24 (1), 95–105. Pin, J. E. (1998) Tropical semirings. — In 69. J. Gunawardena (Ed.), Idempotency. — Publ. of the Newton Institute, Vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge (1998). 50-60.
135. Rockafellar R. T. (1970). Convex analysis. Princeton University Press, 1970.
136. Rochet. J. C. (1987) A necessary and sufficient condition for rationalizability in a quasilinear context.J. Math. Econom., 16(2):191–200, 1987.
137. Saks, M. and Yu, L. (2005) Weak monotonicity suffices for truthfulness on convex domains. In Proceedings of the 6th ACM Conference on Electronic Commerce, EC ’05, pages 286–293, New York, NY, USA, 2005.
138. Sergeev S. Multiorder, kleene stars and cyclic projectors in the geometry of max cones. Contemporary mathematics, 14:317, 2009.
139. Shioura, A. and Tamura, A. (2015). Gross substitutes condition and discrete concavity for multi-unit valuations: A survey. Journal of the Operations Research Society of Japan 58(1), 61–103.
140. Sun, N. and Yang, Z. (2006). Equilibria and indivisibilities: Gross substitutes and complements. Econometrica 74(5), 1385–1402.
141. Sun, N. and Yang, Z. (2009). A double-track adjustment process for discrete markets with substitutes and complements. Econometrica 77 (3), 933–952. 30]

References in Cyrillics

1. Arnol`d V.I. (2002) Chto takoe matematika? — M.: MCzNMO, 2002.— 104 s. ISBN 5-94057-090-9
2. Vorob`ev N. N. (1963) E`kstremal`naya algebra matricz. Doklady` Akademii nauk SSSR. Matematika, informatika, processy` upravleniya 152 (1), 24–27 (1963).
3. Vorob`ev N. N. (1967) E`kstremal`naya algebra polozhitel`ny`x matricz. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 3 (1), 39–72 (1967).
4. Vorob`ev N. N. (1970) E`kstremal`naya algebra neotriczatel`ny`x matricz. Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik 6 (4/5), 303–312 (1970).
5. Danilov V. I. (2025), “Vvedenie v teoriyu vy`bora i stabil`ny`x kontraktov”, UMN, 80:4(484) (2025), 3–46; Russian Math. Surveys, 80:4 (2025), 549–590
6. Danilov V. I. (2015), Zamenimost` i dopolnitel`nost` tovarov v terminax funkcij poleznosti // E`konomika i matematicheskie metody`. — 2015. — T. 51, № 4. — S. 25–36.
7. Danilov V.I., Koshevoj G.A. (2009) E`konomiki s innovacionny`mi tovarami (s Koshevy`m GA.), E`ko-nomika i matematicheskie metody`, 2009, 45(1). [251 kB]
8. Danilov V.I., Koshevoj G.A. (2004) Diskretnaya vy`puklost` // Zapiski nauchny`x seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN. 2004. T. 312. № 11. S. 86–93.
9. Danilov V.I., Koshevoj G.A., Sotskov A.I. (1993) E`konomicheskoe ravnovesie na ry`nke intellektual`ny`x produktov // E`konomika i matematicheskie metody`. 29, vy`p. 4, 1993, S.606-616.
10. Danilov V.I., Koshevoj G.A., Lang K. (2013) Ravnovesiya na ry`nke nedelimy`x tovarov // Zhurnal Novoj e`konomicheskoj associacii. 2013. № 2 (18). S. 10–34.
11. Danilov V.I., Koshevoj G.A., (2003) Diskretnaya vy`puklost` i e`rmitovy` matricy, Trudy` matema-ticheskogo instituta im. Steklova, vol. 241, Moskva, Nauka, 2003, 68–89 [334 kB]
12. Danilov V.I., (2000) Celochislennaya vy`puklost` Trudy` seminara I. R. Shafarevicha Vtoroj vy`-pusk, Moskva, 2000, 448–66 [251 kB] 4
13. Dudnikov P. S., Samborskij S. N. (1991), “E`ndomorfizmy` polumodulej nad polukol`czami s idempotentnoj operaciej”, Izv. AN SSSR. Ser. matem., 55:1 (1991), 93–109; Math. USSR-Izv., 38:1 (1992), 91–105.
14. Galushka A. S., Niyazmetov A. K., Okulov M. O. (2021). Kristall rosta k russkomu e`konomicheskomu chudu. M.: Nashe Zavtra. [Galushka A. S., Niyazmetov A. K., Okulov M. O. (2021). Growth crystal to the Russian economic miracle. Moscow: Nashe Zavtra. (In Russian).]
15. Kazarnovskij B. Ya., Xovanskij A. G., E`sterov A. I., Uspexi matematicheskix nauk, 2021, Tom 76, vy`pusk 1(457), ss. 95–190 DOI: https://doi.org/10.4213/rm9937
16. Kozy`rev A.N. Sovmestimost` stimulov i dvojstvennost` v usloviyax nepolnoj informacii // Cifrovaya e`konomika № 4(34), 2025 – s. 5–17. DOI: 10.34706/de-2025-03-01 10.34706/DE-2025-04-01
17. Kozy`rev A. N. Cifrovaya e`konomika i e`konomika danny`x // Cifrovaya e`konomika № 2(28), 2024 – s. 5–13. DOI: 10.33276/de-2024-02-01

18. Kozy`rev A. N. E`konomika danny`x, obuchenie nejrosetej i mnogomernaya geometriya// Cifrovaya e`konomika № 3(29), 2024 – s. 5–13. DOI: 10.34706/de-2024-03-01
19. Kozy`rev A.N. Modelirovanie NTP, tropicheskaya matematika i cifrovaya e`konomika, glava 53, s. 463–485. Monografiya Rossijskaya social`no-e`konomicheskaya Sistema: realii i vektory` razvi-tiya. 4-e izdanie, pererabotannoe i dopolnennoe. Otv. redaktory` R.S. Grinberg, P.V. Savchenko. M.: IN-FRA-M, 2021. – 596 s. ISBN 978-5-16-016215-7
20. Kozy`rev A.N. Sovmestimost` stimulov, cifrovizaciya i torgovlya znaniyami// Cifrovaya e`konomi-ka № 1(9), 2020 – s. 5–20, DOI: 10.34706/DE-2020-01-01
21. Kozy`rev A.N. Sovremennoe sostoyanie issledovanij v oblasti torgovli informaciej// Cifro-vaya e`konomika № 1(9), 2020 – s. 63–75, DOI: 10.34706/DE-2020-01-07
22. Kozy`rev A.N. Optimizaciya razmeshheniya vzaimosvyazanny`x NIOKR na osnove dvojnogo auk-ciona //E`konomika i matematicheskie metody`//E`MM, TOM 55, VY`PUSK 1, 2019, s. 32-42 DOI: 10.31857/S042473880004026-7
23. Kozy`rev A.N. Modelirovanie NTP, uporyadochennost` i cifrovaya e`konomika// E`konomika i mate-maticheskie metody`, t. 47, № 4, 2011 g. Kozy`rev A.N. (1999) Algebraicheskie svojstva informacii i ry`nok. Nauchno-texnicheskaya informaciya. ser.1, 1999, № 5. 6s.
24. Kozy`rev A.N. (1989) Ry`nok programmnogo obespecheniya v SSSR, licenzionny`e i avtorskie dogo-vory`, ceny`. Mir PK № 3. – 1989, M.: Radio i svyaz` & IDG communications. 7s.
25. Kozy`rev A.N. (1989) Obshhee ravnovesie v e`konomike s ry`nkami licenzij i produktov. Tezisy` do-kladov Vsesoyuznoj shkoly`-seminara “Social`no-e`konomicheskie processy`”, Kishinyov, 1989. 2s.
26. Kondrakov I. A., Shananin A. A. (211), Idempotentny`e analogi teorem o neotriczatel`ny`x matri-czax i ix prilozheniya k analizu e`konomicheskoj informacii, Zh. vy`chisl. matem. i matem. fiz., 2011, tom 51, nomer 2, 188–205.
27. Korbut A. A. (1965) E`kstremal`ny`e prostranstva. Doklady` Akademii nauk SSSR. Matematika, informatika, processy` upravleniya 164 (6), 1229–1231.
28. Korbut A. A. (1972) E`kstremal`ny`e vektorny`e prostranstva i ix svojstva. Elektronische Infor-mationsverarbeitung und Kybernetik 8 (8/9), 525–536.
29. Krajnov D.E., Matveenko V.D. (2006) Model` e`ndogennogo rosta v innovacionnoj e`konomike
30. Krivulin N. K. (2025) Modeli i metody` tropicheskoj algebry` v zadachax optimizacii i issledo-vaniya operacij // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mexanika. Astrono-miya. 2025. T. 12 (70). Vy`p. 3. S. 444–473.
31. Krivulin N. K., Gubanov S. A. (2016) Reshenie zadachi setevogo planirovaniya na osnove metodov tropicheskoj optimizacii // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10. Prikladnaya ma-tematika. Informatika. Processy` upravleniya. 2016. Vy`p. 3. S. 62–72. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.306
32. Krivulin N. K. (2009) Metody` idempotentnoj algebry` v zadachax modelirovaniya i analiza slozh-ny`x sistem. SPb.: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2009. 256 s.
33. Krivulin N. K., Ageev V. A. Metody` tropicheskoj optimizacii v mnogokriterial`ny`x zadachax ocenki al`ternativ na osnove parny`x sravnenij // Vestnik SPbGU. Prikladnaya matematika. In-formatika. Processy` upravleniya. — 2019. — №4. — P. 472–488.
34. Krivulin N.K. i dr. (2024) Reshenie mnogokriterial`ny`x zadach ocenki al`ternativ na osnove parny`x sravnenij / Krivulin N. K., Bulgakova D. S., Grigor`ev D. A., Nagumanova K. I., Prin`kov A. S., Salova Ya. A., Filatova A. A. // Komp`yuterny`e instrumenty` v obrazovanii. — 2024. — №2. — P. 5–29.
35. Krajnev D.E., Matveenko V.D. Model` e`ndogennogo rosta v innovacionnoj e`konomike s.294-297
36. Litvinov G. L., Dekvantovanie Maslova, idempotentnaya i tropicheskaya matematika: kratkoe vve-denie, Zap. nauchn. sem. POMI, 2005, tom 326, 145–18.
37. Litvinov G. L., Sobolevskij A. N., (2000) Tochny`e interval`ny`e resheniya diskretnogo uravneniya Bellmana i polinomial`naya slozhnost` zadach interval`noj idempotentnoj linejnoj algebry`. — Dokl. RAN 374 (2000), po. 2, 304–306.
38. Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz , G. B. Linejny`e funkcionaly` na idempotentny`x prostran-stvax. Algebraicheskij podxod. — Dokl. AN SSSR 363 (1998), po. 3, 298-300.
39. Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz , G. B. z, Tenzorny`e proizvedeniya idempotentny`x polumodu-lej. Algebraicheskij podxod. — Mat. zametki 65 (1999), po. 4, 572-585.
40. Litvinov G. L., Shpiz , G. B., Yaderny`e polumoduli i teoremy` o yadre. Algebraicheskij podxod. — Dokl. AN SSSR 386 (2002), po. 3, 300—303.
41. Makarov V.L. (1973) Balans nauchny`x razrabotok i algoritm ego resheniya // Sb.st. Optimizaciya, Novosibirsk, 1973, vy`p.11(28),37-45.
42. Makarov V. L. (2003). E`konomika znanij: uroki dlya Rossii // Vestnik Rossijskoj akademii nauk. T. 73, № 5. S. 450—460. [Makarov V. L. (2003). Knowledge economy: Lessons for Russia. Vestnik Ros-siyskoy Akademii Nauk, Vol. 73, No. 5, pp. 450—460. (In Russian).]
43. Maslov V. P., Kolokol`czov V. N. Idempotentny`j analiz i ego primenenie v optimal`nom uprav-lenii. M.: Fizmatlit, 1994. 144 s.
44. Matveenko V.D., Nev O.A. (2012) Igrovaya model` prirashheniya znanij

45. Romanovskij I. V. (1959) Obodnoj teoreme R. Belmana. Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya 4 (4), 456–458.
46. Romanovskij I. V. (1964) Asimptotika rekurrentny`x sootnoshenij dinamicheskogo programmirovaniya i optimal`noe stacionarnoe upravlenie. Doklady` Akademii nauk SSSR. Matematika, informatika, processy` upravleniya 157 (6), 1303–1306 (1964).
47. Romanovskij I. V. Optimizaciya stacionarnogo upravleniya diskretny`m determinirovanny`m processom. Kibernetika i sistemny`j analiz 3 (2), 66–78 (1967).
48. Timorin V. A., Xovanskij A. G., "Mnogogranniki i uravneniya", Matem. prosv., ser. 3, 14, Izd-vo MCzNMO, M., 2010, 30–57 [34] 154.
49. Shpiz G. B., (2000) Reshenie algebraicheskix uravnenij v idempotentny`x polu-polyax. — Usp. mat. nauk 55 (2000), po. 5, 185—186.
50. Yakovlev D. M., Krivulin N. K. (2025) Reshenie mnogokriterial`noj zadachi opredeleniya priori-tetov dorozhny`x rabot. Izbranny`e trudy` vesennej nauchno-prakticheskoj konferencii po vopro-sam informatiki, matematiki, mexaniki i astronomii «Mat-mex. Nauka 2025» 28 aprelya – 3 maya 2025 g. Sankt-Peterburg S. 63–73

Ключевые слова
двойственность, квазидифференциал, критическая точка, многообразие, равновесие

Козырев Анатолий Николаевич, к.ф.-м.н., д.э.н
Центральный экономико-математический институт РАН
ORCID 0000-0003-3879-5745,
kozyrevan@yandex.ru

Anatoly Kozyrev, Applications of tropical mathematics in economics and game theory

Keywords
duality, quasidifferential, critical point, manifold, equilibrium.
DOI: 10.34706/DE-2025-05-05
JEL classification: C65-Разнообразные математические инструменты; C71 Кооперативные игры

Abstract
The possibilities of using tropical (idempotent) mathematics in solving economic problems where traditional mathematical methods do not work or work poorly are shown. Much attention is paid to works where the use of tropical mathematics is not limited to speeding up computational procedures, but concerns the very concept of the problem, its meaningful meaning. Unfortunately, there are very few such works, although the transition to the digital economy and the country economy would seem to give rise to the use of tropical methods, since digital products have suitable properties.