2. ПЕРЕВОДЫ

2.1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ КВАНТОВОЙ ЭКОНОМИКИ

Дэвид Оррелл, Системное прогнозирование
Последнее обновление оригинала 6 июля 2019.[1]

Этот документ задуман как техническое введение в математику, используемую в квантовой экономике, и предлагается в качестве дополнения к книге «Квантовая экономика: новая наука о деньгах». Ключевые идеи квантовой экономики не опираются на уравнения. Однако квантовый формализм является математическим, поэтому для полного использования его идей некоторая математика полезна. Преследуемая здесь цель – набросать способ, которым экономика может быть представлена математически с использованием квантового формализма, показать преимущества перед классическим подходом и уточнить смысл утверждения о том, что экономика сама по себе может рассматриваться как квантовая система.

(1) Используйте математику как сокращенный язык, а не как инструмент исследования. (2) Придерживайтесь ее, пока вы не доделали работу. (3) переведите на английский язык. (4) затем проиллюстрируйте важными примерами из реальной жизни. (5) сожгите математику.

Альфред Маршалл, 1906[2]

Слишком большая часть современной "математической" экономики – это просто выдумки, столь же неточные, как и исходные предположения, на которых они основываются, они позволяют автору упустить из виду сложности и взаимозависимости реального мира в лабиринте претенциозных и бесполезных символов.

Джон Мейнард Кейнс, 1936[3]

Природа – не классическая, черт возьми, и, если вы хотите создать модель природы, вам лучше сделать ее квантово-механической.

Ричард Фейнман, 1981[4].

1. Введение

Этот документ задуман как техническое введение в математику, используемую в квантовой экономике, и предлагается в качестве дополнения к книге «Квантовая экономика: новая наука о деньгах». Как видно из приведенных выше цитат, экономика –это не то же самое, что математическое доказательство, а потому ключевые идеи квантовой экономики, такие как квантовая теория денег и стоимости, не опираются на уравнения. Однако квантовый формализм является математическим, поэтому для полного использования его идей некоторая математика полезна (даже если она впоследствии сжигается). Преследуемая здесь цель – набросать способ, которым экономика может быть представлена математически с использованием квантового формализма, показать преимущества перед классическим подходом и уточнить (по крайней мере, для тех, кто немного знает базовую матричную алгебру), что значит сказать, что экономика сама по себе может рассматриваться как квантовая система.

Квантовый подход к экономике вдохновлен тем эмпирическим фактом, что денежная система проявляет квантовые свойства, такие как дискретность, неопределенность, запутанность и т. д. Поэтому, по выражению Фейнмана, моделирование должно быть квантово-механическим в том смысле, что оно отражает эти свойства (даже если оно непосредственно не использует квантовый формализм). Поэтому дело не в том, что квантовый подход будет лучшим методом для моделирования каждого аспекта экономики, а в том, что экономика имеет квантовые свойства, которые, возможно, необходимо учитывать (явно или неявно) в зависимости от контекста.

Пример из физики: синоптики не основывают свои модели на квантовой механике, но они основывают их на сложных свойствах воды, возникающих из квантовой механики. Таким образом, главный урок в данном случае заключается в том, что квантовые свойства молекул воды приводят к очень сложным

[1] Предлагается цитировать оригинал как: Orrell, D. (6 July 2019), Introduction to the mathematics of quantum economics. Retrieved from http://www.postpythagorean.com/quantumeconomicsmath.pdf

[2] «(6) Если вы успешны в (4), сожгите (3). Я всегда так делаю.» Письмо к A.L. Bowley, 27 февраля 1906.

[3] Из книги The General Theory of Employment, Interest and Money.

[4] Из речи 1981 года "Simulating Physics with Computers" on the idea of a quantum computer.

эмерджентным свойствам на глобальном уровне, которые противятся спуску на более низкий уровень. Поэтому в экономическом моделировании можно сделать вывод, что экономическое поведение должно моделироваться на соответствующем уровне, тогда квантовые свойства не выпячиваются. С другой стороны, в физике такая технология, как атомная бомба, масштабирует квантовые свойства до макроуровня. Точно так же деньги –это разработанная технология, и ее свойства иногда расширяются, чтобы повлиять на экономику в целом, например, через такие явления, как создание денег частными банками.

Модели в конечном счете оправдываются их успехом в объяснении и прогнозировании данных. Хотя основное внимание здесь уделяется представлению основных теоретических инструментов и демонстрации того, как они соотносятся с природой экономических операций, а не с конкретными результатами, следует отметить, что области квантового познания и квантовых финансов в значительной степени эмпирические, основывающие свои результаты на экспериментальных данных для первых и рыночных данных для последних. Более широкая область квантовой экономики – работа с эмерджентными свойствами сложной системы – включает в себя помимо этого различные методы, основанные на сложности, от агентных моделей до системной динамики, которые также были эмпирически проверены (исключение составляют квантовые агентные модели, которые, насколько мне известно, еще не разработаны для экономики). Однако наиболее очевидным эмпирическим аргументом в пользу квантового подхода является просто природа денег, для которой наличие квантовых свойств уже признано. Для получения дополнительной информации см. книгу[5] и ссылки в ней.

Схема документа выглядит следующим образом. В разделе 2 представлена идея гильбертова пространства и показано на примере человеческого познания, как квантовая вероятность отличается от ее классической версии. В разделе 3 показано, где разрушаются классические подходы к познанию, используемые в поведенческой экономике, а в разделе 4 квантовый подход иллюстрируется на двух примерах. В разделе 5 обсуждается процедура квантования для динамической системы, она применяется к парадигматическому примеру квантового гармонического осциллятора. В разделе 6 те же идеи используются для разработки квантовой модели рынка, где акции и наличные деньги теперь занимают место бозонов. В разделе 7 исследуется квантовое представление спроса и предложения. В разделе 8 этот динамический анализ распространяется на производство и потребление и показано, как можно построить квантовые модели для более общих применений. В разделе 9 обсуждается концепция запутанности, а в разделе 10 обобщаются основные выводы.

2. Некоторые основы

Пожалуй, самым важный математический инструмент в квантовой теории – концепция гильбертова пространства, получившая свое название в честь немецкого математика Давида Гильберта (1862-1943). Она была разработан как абстрактный математический объект в первом десятилетии двадцатого века, а затем была принята исследователями в квантовой физике. Социологи теперь следуют их примеру, применяя её к проблемам в таких областях, как принятие решений и финансы, что и показано ниже[6].

Гильбертово пространство H – это тип векторного пространства, элементы которого, обозначаемые $|u\rangle$, имеют коэффициенты, которые могут быть комплексными числами. Двойственное состояние $\langle u|$ является комплексным сопряжением транспонирования $|u\rangle$. Скалярное произведение между двумя элементами $\langle u|$ и $|v\rangle$ обозначается $\langle u|v\rangle$ аналогично скалярному произведению в нормальном векторном пространстве, с той разницей, что результат снова может быть комплексным. Внешнее произведение обозначается $|u\rangle\langle \mathrm{v}|$ и похоже на умножение вектора столбца на вектор строки, которое дает матрицу. Величина элемента $|u\rangle$ задается через $\sqrt{\langle u|u\rangle}$, и два элемента ортогональны, если $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle = 0$. Поэтому гильбертово пространство можно рассматривать как обобщение евклидова пространства с той разницей, что у него может быть бесконечное число измерений, базис не обязательно должен состоять просто из векторов столбцов, а коэффициенты могут быть комплексными.

Оператор $\hat{A}$ –это отображение, которое переводит один элемент$|u\rangle$ из H в другой элемент $\hat{A}|u\rangle$ из H. Например, оператор проекции, определяемый как $\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{u}} = |u\rangle\langle u|$, и $\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{u}}|\mathrm{v}\rangle = |\mathrm{u}\rangle\langle u|v\rangle$, дает проекцию v на u. Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ обычно не коммутируют, $\hat{A}\widehat{\mathrm{B}} \neq \widehat{\mathrm{B}}\hat{A}$. Состояние $|u\rangle$ является собственным вектором $\hat{A}$, если $\hat{A}|u\rangle = \lambda|u\rangle$, где λ – соответствующее собственное значение. Например, $\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{u}}|u\rangle = |u\rangle\langle u|u\rangle = \lambda|\mathrm{u}\rangle$, тогда $|\mathrm{u}\rangle$ является собственным вектором $\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{u}}$ с собственным значением $\lambda = \langle u|u\rangle$). Ожидаемое значение линейного оператора $\tilde{A}$ в состоянии $|u\rangle$ задается через $\langle u|\hat{A}|u\rangle$, т. е. скалярное произведение $\langle u|$ на $\hat{A}|u\rangle$.

Ключевой особенностью квантовой теории является то, что наблюдаемые свойства, такие как положение частицы или импульс, представлены Эрмитовыми операторами, имеющими вещественные

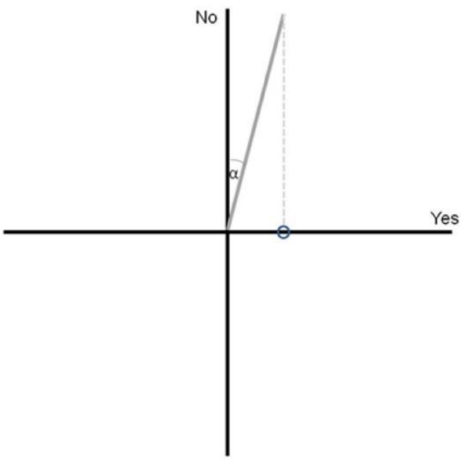
[5] Смотри: Orrell, D. (2018), ‘Quantum Economics’, Economic Thought, 7 (2).

[6] Некоторые исследователи когнитивной науки предпочитают рассматривать гильбертово пространство только как инструмент, а слово «квант» – как отвлечение внимания. Ирвинг Фишер в своей книге «Математические исследования в теории стоимости и цен» (1892) столкнулся с аналогичной проблемой, связанной со словом «полезность», которую он описал как «наследие Бентама и его теории удовольствий и страданий. *Слово* которого для нас тем более приемлемо, чем меньше оно связано с его *теорией*» (с. 23). Лично я думаю, что было бы немного вынужденно игнорировать связи теории с физической реальностью.

собственные значения[7]. Вместо того, чтобы быть пассивными элементами, как в классической теории, они являются операторами, что ставит вопрос о системе. Во время измерения наблюдаемого свойства состояние системы $|S\rangle$ коллапсирует к одному из собственных векторов ассоциированного оператора, с вероятностью, заданной квадратом проекции состояния $|S\rangle$ на этот собственный вектор.

Чтобы увидеть разницу между классическим и квантовым подходами в контексте человеческого познания, предположим, что у человека есть выбор между определенным числом возможных вариантов. В классической теории вероятностей каждый выбор u будет рассматриваться как подмножество множества U, состоящего из всех вариантов. Когнитивное состояние человека представлено функцией P с вероятностью выбора X, заданной $p(u)$. В качестве простого примера U может состоять из двух вариантов u и v, с соответствующими вероятностями $p(u)$ и $p(v)$, которые удовлетворяют $p(u) + p(v) = 1$.

В квантовом познании выбор в ответ на конкретный вопрос рассматривается вместо этого как элемент (например, вектор) $|u\rangle$ гильбертова пространства H, а когнитивное состояние человека представлено элементом $|S\rangle$, оба длины l. (Состояние $|\mathrm{S}\rangle$ иногда называют волновой функцией, хотя здесь она является статической, а не изменяющейся во времени). Здесь связанный оператор $\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{u}}$ – это тот, который проецирует векторы на вектор $|u\rangle$. Вероятность ответа на вопрос, являющийся $|u\rangle$, задается затем величиной квадрата проекции, которая равна $|\langle u|S\rangle|^2$.



Простой пример. Две оси на рисунке ниже представляют решения «да» или «нет» по какому-либо вопросу, в то время как состояние человека представлено серой линией под углом α к оси «нет». Вероятность принятия решения «да» определяется квадратом проекции на ось «да», который равен $\sin^2\alpha$.

Рисунок 2.1. Оси показывают состояния решения, соответствующие собственным векторам, серая линия показывает состояние человека $|S\rangle$. Вероятность принятия решения "да" определяется путем проецирования на ось "да" и возведения в квадрат, что дает $\sin^2 a$.

Этот сдвиг от наборов элементов к геометрическим проекциям позволяет получить более сложные вероятностные эффекты, такие как некоммутативность и интерференция, характеризующие, как показано в следующе разделе, человеческое познание.

3. Человеческое познание

Неоклассическая экономика основана на теории ожидаемой полезности, которая была впервые кодифицирована венгерским математиком Джоном фон Нейманом и экономистом Оскаром Моргенштерном в их книге 1944 года «*Теория игр и экономическое поведение*». Цель состояла в том, чтобы «найти математически полные принципы, определяющие "рациональное поведение " участников социальной экономики, и вывести из них общие характеристики этого поведения». Они пришли к списку из четырех принципов, или аксиом.

Предположим, агент сталкивается с двумя играми или лотереями A и B с различными потенциальными выплатами. Тогда аксиома полноты предполагает, что агент имеет четко определенные предпочтения и всегда может выбирать между двумя альтернативами. Аксиома транзитивности предполагает, что агент всегда принимает решения последовательно – если A предпочтительнее B, а B предпочтительнее C, то A предпочтительнее C. Аксиома независимости предполагает, что если агент предпочитает A перед B, то введение несвязанной лотереи C не изменяет этого предпочтения. Наконец, аксиома непрерывности предполагает, что если агент предпочитает A над B и B над C, то должно существовать некоторое сочетание наиболее предпочтительного A и наименее предпочтительного C, одинаково привлекательное с B. Если агент соответствует этим четырем аксиомам, то его предпочтения могут быть смоделированы с использованием так называемой функции полезности, и они официально рациональны.

Ожидаемая полезность для каждой лотереи определяется как сумма полезностей возможных исходов, взвешенных по вероятности каждого исхода. Предположим, например, что лотерея А имеет два возможных выигрыша: сумму a_1 с вероятностью $p(a_1)$ и сумму a_2 с вероятностью $p(a_2)$. Ожидаемая полезность – это

$$U(A) = p(a_1)u(a_1) + p(a_2)u(a_2) = p(a_1)a_1 + p(a_2)a_2,$$

поскольку полезность выплаты здесь в точности выплата. Лотерея B предпочтительна, если ее ожидаемая полезность удовлетворяет $\mathrm{U(B)} > \mathrm{U(A)}$.

[7] Эрмитов оператор –это тот, что равен своему Эрмитову сопряжению, которое для матричного оператора определяется как комплексное сопряжение транспонирования, поэтому $A = A\dagger \equiv (AT)*$.

Хотя теория ожидаемой полезности все еще остается основой для большинства экономических моделей, уже в 1970-х годах поведенческие психологи и экономисты показали, что теория не охватывает различные когнитивные явления. Одной из первых попыток изменить теорию ожидаемой полезности была теория перспектив Канемана и Тверски, опубликованная в их статье 1979 года «Теория перспектив: анализ решения в условиях риска». Это модифицировало теорию ожидаемой полезности двумя способами. Во-первых, нужно было сказать, что имеет значение не конечная сумма, а выигрыш или проигрыш относительно некоторой контрольной точки. Во-вторых, результаты взвешиваются нелинейной функцией взвешивания неопределенности, а не самой вероятностью. Эти два основных вывода теории перспектив проиллюстрированы на рисунках 3.1 и 3.2.

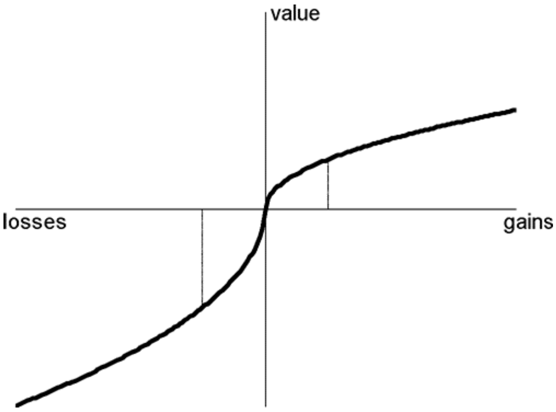


Рисунок 3.1. График функции ценности. Горизонтальная ось показывает денежные прибыли или убытки. Центр представляет собой эталонный уровень, в соответствии с которым возникают прибыли или убытки. Вертикальная ось показывает психологическую ценность. Кривая нелинейна, потому что функция ценности дает насыщение для больших прибылей или потерь. Кривая также асимметрична вокруг начала координат, потому что потеря определенной суммы ощущается более остро, чем выигрыш той же суммы (пунктирные линии). Точная форма кривой будет отличаться для разных людей.

Далее (Tversky & Kahneman, 1992) ценностная функция $v(x)$ и весовая функция неопределенности $w(p)$ были получены с использованием следующих уравнений:

$$\mathrm{v(x)} = -2(-x)^{0.5} \text{ для } x < 0$$
$$\mathrm{v(x)} = x^{0.5} \text{ для } x > 0$$

и

$$w(p) = \frac{p^{\gamma}}{\left(p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma}\right)^{1/\gamma}},$$

где $\gamma = 0.61$.

Вместе эти рисунки обобщают многие ключевые когнитивные явления, составляющие ядро поведенческой экономики. Например, потери и выгоды ощущаются относительно некоторой точки отсчета, которая будет зависеть от контекста. Эта точка представлена нулем горизонтальной оси для кривой значений (рис. 3.1). Большинство людей не склонны к потерям в том смысле, что потеря определенной суммы примерно в два раза болезненнее, чем приятен выигрыш той же суммы. Вот почему кривая ценности асимметрична вокруг начала координат с более крутым наклоном для потерь. Другой вывод, восходящий к математику восемнадцатого века Даниэлю Бернулли, заключается в том, что эффект потерь или прибылей имеет тенденцию насыщаться в больших количествах, как указано на графике путем сглаживания кривой ценности.

Эксперименты также показывают, что мы не взвешиваем результаты точно по их вероятностям. В частности, мы склонны придавать больший вес неопределенным результатам, поэтому функция неопределенности на рис.3.2 находится выше пунктирной линии в этой области. Например, мы можем придавать слишком большое значение сообщениям о таких вещах, как террористические нападения или другие маловероятные катастрофы.

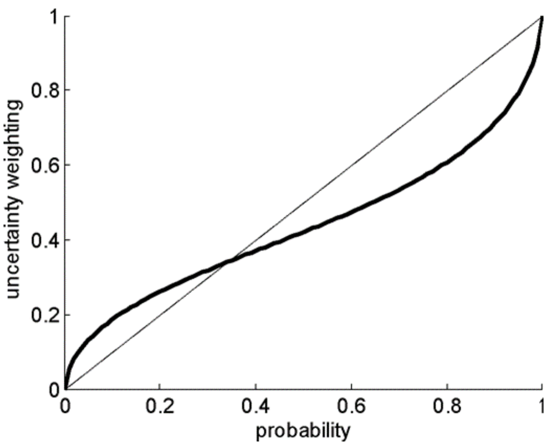


Рисунок 3.2. График весовой функции неопределенности. Горизонтальная ось показывает вероятность. В теории ожидаемой полезности вес неопределенности события равен его вероятности (пунктирная линия). В теории перспективы взвешивание модифицируется таким образом, что маловероятные события перевешиваются относительно событий средней и более высокой вероятности (сплошная линия). Эффект исчезает для определенных событий с вероятностью 1 или запрещенных событий с вероятностью 0. Кривая будет отличаться для потерь и прибылей, но схожа по форме.

Подводя итог, разница между теорией перспективы и теорией ожидаемой полезности заключается в том, что вместо написания

$$U(A) = p(a_1)a_1 + p(a_2)a_2$$

мы пишем

$$U(A) = w(a_1)v(a_1) + w(a_2)v(a_2),$$

где v –-функция ценности и w является функцией взвешивания неопределенности. Поэтому теорию перспектив можно рассматривать как модифицированную версию теории ожидаемой полезности, где линейные зависимости заменяются нелинейными кривыми. В качестве примера того, как это применяется, рассмотрим следующие две игры, которые дают пример парадокса Алле, впервые описанного французским экономистом Морисом Алле в 1952 году.

Игра *A:* выбрать между
a_1: $40 с вероятностью 80%
a_2: $30 с вероятностью 100%

Игра *B*: выбрать между
b_1: $40 с вероятностью 20%
b_2: $30 с вероятностью 25%

Согласно теории ожидаемой полезности имеем

$$\mathrm{U}(\mathrm{a}_1) = p(a_1)a_1 = 0.80 * 40 = 32$$
$$\mathrm{U}(\mathrm{a}_2) = p(a_2)a_2 = 1.00 * 30 = 30$$

для игры *A*, и

$$\mathrm{U}(\mathrm{b}_1) = \mathrm{p}(\mathrm{b}_1)\mathrm{b}_1 = 0.20 * 40 = 8$$
$$\mathrm{U}(\mathrm{b}_2) = \mathrm{p}(\mathrm{b}_2)\mathrm{b}_2 = 0.25 * 30 = 7.50$$

для игры *B*. В любой игре (или перспективе, как ее называют) первый вариант предлагает немного лучшую ожидаемую полезность. Однако на практике люди обычно выбирают первый вариант для игры *B*, но второй вариант для игры *A*. Причина в том, что игра *A* включает в себя вариант «верняк», который более привлекателен. Однако это подразумевало, что теория полезности не была последовательной, что нарушало аксиомы теории ожидаемой полезности.

В теории перспектив с использованием приведенных выше вариантов весовых функций стоимости и неопределенности результаты расчетов становятся

$$\mathrm{U}(\mathrm{a}_1) = w(0.80)v(40) = 0.61 * 6.32 = 3.86$$
$$\mathrm{U}(\mathrm{a}_2) = w(1.00)v(30) = 1.00 * 5.48 = 5.48$$

для игры *A*, и

$$\mathrm{U}(\mathrm{b}_1) = w(0.20)v(40) = 0.26 * 6.32 = 1.64$$
$$\mathrm{U}(\mathrm{b}_2) = w(0.25)v(30) = 0.29 * 5.48 = 1.59$$

для игры *B*. Наиболее привлекательными вариантами теперь стали a_2 и b_1 в согласии с экспериментами.

Хотя теория перспектив действительно затрагивает многие из наших когнитивных причуд, есть ряд других, которые требуют отдельного внимания. Примером может служить парадокс Эллсберга. Он включает урну, содержащую 90 шаров, из которых 30 красных и 60 либо черных, либо желтых. Вам предоставляется выбор между двумя азартными играми.

В игре *A* вы ставите либо на красное, либо на черное.

В игре *B* вы делаете ставку на красный или желтый, или черный или желтый шары.

Что бы вы предпочли? В каждой игре шансы на розыгрыш красного, черного или желтого шара равны 2/3. Единственное различие между играми заключается в том, что в игре *B* каждая сторона ставки включает желтый цвет. Поэтому, если вы предпочитаете красный в игре *A*, то вы должны предпочесть «красный или желтый» в игре *B*. Однако большинство людей видят это по-другому –они смотрят не на цвет шара, а на неопределенность. В игре *A* количество красных шаров, как известно, равно 30, но количество черных шаров неопределенно. Поэтому они выбирают красный цвет в игре *A*. В игре *B* количество желтых шаров неизвестно, однако известно, что сумма черных и желтых шаров равна 60. Поэтому они предпочитают делать ставку на «черный или желтый», так как опять же это вариант с меньшей неопределенностью.

Эта несогласованность противоречит теории ожидаемой полезности, однако она также ускользает от теории перспективы по той простой причине, что вероятности неизвестны, поэтому невозможно настроить их с помощью функции взвешивания неопределенности. Парадокс может быть объяснен только введением нового и иного вида специальной весовой функции, которая объясняет неприятие неопределенности.

На самом деле оказывается, что есть много других когнитивных явлений, которые не могут быть охвачены простым способом, используя классическую теорию. К ним относятся так называемые эффекты конъюнкции и дизъюнкции, эффект порядка и разворот предпочтений. Их объединяет то, что во всех случаях контекст и процедура измерения влияют на ответ, как и при квантовом измерении. В парадоксе Эллсберга, например, два варианта формально идентичны, с точностью до деталей сценария. Неопределенность относительно количества черных или желтых шаров создает своего рода ментальную интерференционную картину, которая влияет на суждение. В следующем разделе показано, как квантовый подход может быть использован для разрешения таких парадоксов.

4. Квантовое познание

В иллюстративных целях мы сосредоточимся в этом разделе на двух примерах. Один из них – обращение предпочтений, связанное как с парадоксом Алле, так и с парадоксом Эллсберга. Начнем с более простого случая эффекта порядка.

Как обсуждалось в книге, опрашивающие и авторы опроса давно знают, что ответы, которые они получают, зависят от точной формулировки вопросов, но также и от их порядка. Ответ на первый вопрос изменяет контекст для второго вопроса, здесь контекст включает собственное состояние ума ответчика. Это явление настолько распространено, что в психологии «некоммутативность должна быть повсеместным правилом», согласно психологам Харальду Атманспахеру и Хартманну Ромеру. Это не имеет смысла с точки зрения классической теории полезности, но похоже на то, что встречается в квантовой физике, где измерение положения влияет на импульс частицы и наоборот.

В статье 2014 года исследователи проанализировали результаты 70 опросов в США и обнаружили, что способ изменения ответов показал лежащую в основе симметрию[8]. Одним из примеров, который они использовали, был опрос Gallup с 1997 года, в котором последовательно задавались вопросы, считают ли респонденты Билла Клинтона и Эла Гора надежными. Число людей, которые назвали их обоих заслуживающими доверия, составило 49%, если Клинтон был назван первым, но выросло до 56%, если первым был назван Гор, разница составила 7%. И наоборот, число тех, кто назвал их обоих ненадежными, составило 28%, если Клинтон был назван первым, но упало до 21%, если первым был назван Гор, опять же разница в 7%. Таким образом, увеличение общей надежности уравновешивалось уменьшением общей ненадежности.

Квантовая модель для этого эксперимента очень проста и может быть визуализирована без использования уравнений[9]. На скриншоте ниже из веб-приложения, доступного по адресу https://david-systemsforecasting.shinyapps.io/ordereffect/ , серая линия показывает состояние человека при ответе на вопрос о Клинтоне. Поэтому она представляет собой снимок вероятностной волновой функции, находящейся в суперпозиции состояний доверия и недоверия. Если бы человек был уверен в своем доверии Клинтону, то эта линия была бы тесно связана с горизонтальной осью YES; при полном отсутствии доверия она совпала бы с вертикальной осью NO. Но человек не совсем доверяет, а потому держит два варианта в суперпозиции с примерно равной силой, а линия почти диагональна. Решение ответить "да" эквивалентно коллапсу состояния суперпозиции неопределенностей и представлено математически путем проекции на ось "да" в точку, показанную белым кругом. Тогда вероятность этого выбора, согласно квантовой модели, равна квадрату расстояния этой точки от центра. Это свернутое состояние затем используется в качестве начального условия для ответа на следующий вопрос. Видно, что изменение порядка вопросов влияет на вероятность ответа таким образом, что соблюдается симметрия между совместным доверием и совместным недоверием.

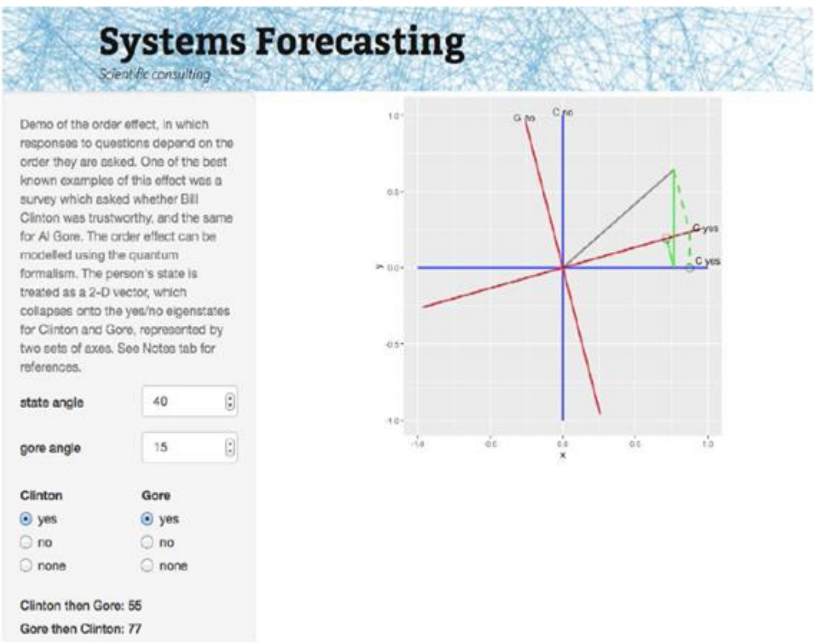


Figure 3.3. Screenshot of the order effect demo, available as a web application.

Хотя эффект порядка является хорошей иллюстрацией квантового подхода, он показывает только эффект контекста, который также может быть рассмотрен с использованием некоторой другой специальной модели. Более ясная иллюстрация квантового познания включает в себя интерференцию при принятии решений в условиях неопределенности, как она рассматривается в теории перспектив.

[8] Wang, Z., Solloway, T., Shiffrin, R.S., and Busemeyer, J.R. (2014), 'Context effects produced by question orders reveal quantum nature of human judgments', Proceedings of the National Academy of Sciences, 111 (26), pp. 9431–6.

[9] Для двумерного случая коэффициенты могут быть вещественными, а не комплексными, см. Moreira, C. & Wichert, A. (2017), 'Are Quantum Models for Order Effects Quantum?', International Journal of Theoretical Physics 56(12): 4029–4046.

Мы сосредоточимся здесь на подходе, известном как квантовая теория решений (QDT). Теория была объяснена в ряде публикаций, поэтому мы просто предложим здесь краткое резюме[10]. Основная идея снова состоит в том, что когнитивные состояния и перспективы моделируются как векторы в гильбертовом пространстве, и система до измерения находится в суперпозиции состояний. Эти состояния могут быть запутаны в том смысле, который мы описываем ниже, что приводит к сложным эффектам. Измерение происходит, когда принимается решение, которое является внутренне вероятностным процессом.

В качестве простого примера рассмотрим психическое состояние человека, который сталкивается с двумя альтернативными перспективами, обозначенными A_1 и A_2. Отношение человека к этим перспективам будет формироваться субъективными желаниями, которые мы называем B_1 и B_2 (их может быть сколько угодно). Эти две перспективы могут быть выражены в гильбертовом пространстве как состояния суперпозиции

$$|\pi_1\rangle = \gamma_{11}|A_1B_1\rangle + \gamma_{12}|A_1B_2\rangle$$
$$|\pi_2\rangle = \gamma_{21}|A_2B_1\rangle + \gamma_{22}|A_2B_2\rangle,$$

где коэффициенты γ_{ij} могут быть комплексными. Состояние человека до принятия решения является

$$|\psi\rangle = \alpha_{11}|A_1B_1\rangle + \alpha_{12}|A_1B_2\rangle + \alpha_{21}|A_2B_1\rangle + \alpha_{22}|A_2B_2\rangle,$$

где коэффициенты удовлетворяют

$$\lfloor\langle\psi|\psi\rangle\rfloor^2 = |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{21}|^2 + |\alpha_{22}|^2 = 1.$$

Поэтому вероятность того, что человек выберет перспективу π_j, равна

$$p(\pi_j) = \frac{1}{p}\left\lfloor\langle\psi|\pi_j\rangle\right\rfloor^2 = \frac{1}{p}\left(\alpha_{j1}^*\gamma_{j1} + \alpha_{j2}^*\gamma_{j2}\right)\left(\alpha_{j1}^*\gamma_{j1} + \alpha_{j2}^*\gamma_{j2}\right),$$

где $p = \lfloor\langle\psi|\pi_1\rangle\rfloor^2 + \lfloor\langle\psi|\pi_2\rangle\rfloor^2$ является условием нормализации для обеспечения того, чтобы вероятности добавлялись к 1.

Это может быть записано в форме

$$p(\pi_j) = f(\pi_j) + q(\pi_j),$$

где

$$f(\pi_j) = \frac{1}{p}\left(\left|\alpha_{j1}\right|^2\left|\gamma_{j1}\right|^2 + \left|\alpha_{j2}\right|^2\left|\gamma_{j2}\right|^2\right)$$

называется функцией полезности, а

$$q(\pi_j) = \frac{1}{p}\left(\alpha_{j1}^*\gamma_{j1}\alpha_{j2}^*\gamma_{j2} + \alpha_{j2}^*\gamma_{j2}\alpha_{j1}^*\gamma_{j1}\right)$$

называется функцией притяжения. Функция полезности отделяет два условия, соответствующие результатам A_1 и A_2 (в примере лотереи это соответствовало бы ожидаемой выплате от лотереи), в то время как функция притяжения представляет их запутывание через различные субъективные контексты B_1 и B_2. Заметим, что если нет запутанности, то $q(\pi_j) = 0$, вероятности те же, что и для классического подхода, и нет необходимости применять квантовые методы.

Поскольку классическая полезность выражается в вероятностной форме, должно выполняться $f(\pi_1) + f(\pi_2) = 1$. Но из $p(\pi_1) + p(\pi_2) = 1$ следует $q(\pi_1) + q(\pi_2) = 0$. Затем можно показать, что при отсутствии какой-либо информации о структуре функции притяжения можно ожидать, что функция притяжения более привлекательного выбора будет равна 1/4, а менее привлекательного выбора -1/4. Этот результат известен как «закон четверти» и был проверен эмпирически в различных ситуациях с использованием контролируемых экспериментов[11].

Теперь, согласно классической теории полезности, человек должен выбрать перспективу π_2, если $f(\pi_1) - f(\pi_2) > 0$. Однако в QDT надо учитывать условия интерференции, поэтому соответствующий тест имеет вид $f(\pi_1) + q(\pi_1) - f(\pi_2) - q(\pi_2) > 0$ или, что эквивалентно,

$f(\pi_1) - f(\pi_2) > 2q|\pi_1|$.

Другими словами, функция притяжения устанавливает порог, который должен быть превышен, чтобы вариант рассматривался как предпочтительный. Следуя закону четверти, начальная догадка заключается в том, что полезность одной возможности (по шкале от 0 до 1) должна превышать полезность другой на 0,5. Юкалов и Сорнетт называют это критерием изменения предпочтений по причинам, рассмотренным ниже.

Можно пойти иным путем, предположим, что более привлекательный вариант соответствует стоимости x_1, а менее привлекательный вариант – стоимости x_2. Мы можем назначить относительные функции полезности

$$f(\pi_1) = \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

[10] Смотри дискуссионную публикацию “Quantum Financial Entanglement: The Case of Strategic Default” на https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3394550, а также ссылки на нее.

[11] Yukalov & Sornette, 2015

$$f(\pi_2) = \frac{x_1}{x_1+x_2},$$

сумма которых равна 1. Затем выполняется условие реверсирования предпочтений

$$f(\pi_2) - f(\pi_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2} > \frac{1}{2}.$$

Равенство в приведенном выше выражении достигается, если $x_2 = 3x_1$, и вообще, если условие выполняется, мы могли бы ожидать $\frac{x_2}{x_1} > 3$. Опять же, это следует рассматривать только в первом приближении, но подчеркивает значительную роль, которую субъективные эффекты играют в принятии решений.

Квантовая теория принятия решений до сих пор в основном применялась к экспериментам, где участникам предлагалось выбирать между тщательно продуманными лотереями с различным балансом риска и вознаграждения. Одним из примеров является разворот предпочтений, где выбор делается между двумя лотереями, первая из которых предлагает высокую вероятность низкой выплаты, вторая-низкую вероятность высокой выплаты. Если ожидаемая полезность второй лотереи немного выше, то для себя люди все равно склонны выбирать первую лотерею. Но если вопрос переформулирован так, что их просят оценить билет, который может быть продан кому-то другому, они более высоко оценят вторую лотерею.

Тверски и Талер (1990) определили, что это явление вызвано нарушением инвариантности процедуры: субъективные веса выплат в ценообразовании более весомы, чем в выборе. Они заключают: «во-первых, люди не обладают набором предопределенных предпочтений для каждого непредвиденного обстоятельства. Скорее, предпочтения строятся в процессе принятия решения или суждения. Во-вторых, контекст и процедуры, связанные с принятием решений или суждений, влияют на предпочтения, которые подразумеваются вызванными ответами. С практической точки зрения это означает, что поведение может варьироваться в зависимости от ситуаций, которые экономисты считают идентичными».

Кажется, что мы используем одну ментальную структуру при принятии решения, а другую при оценке цены, таким образом, который может быть рассмотрен в классической модели только путем введения ad hoc весовых коэффициентов. Однако квантовый подход по умолчанию чувствителен к контексту. Психическое состояние человека моделируется не в терминах фиксированных предпочтений, а как контекстно-зависимая волновая функция, коллапсирующую к решению только тогда, когда задается вопрос.

Юкалов и Сорнетт проанализировали наборы экспериментальных данных для таких примеров лотереи, чтобы показать, что точка перехода между двумя выборами следует их критерию предпочтения (Yukalov and Sornette, 2015). Они также связывают это с так называемым парадоксом планирования, когда мы предпочитаем одно, когда говорим о будущем, и другое, когда говорим о настоящем. Примером может служить ситуация курильщика, который решает, бросить ли курить сейчас или бросить курить позже. С точки зрения ожидаемой полезности предпочтения должны быть одинаковыми, но на практике последнее гораздо более привлекательно, поэтому людям трудно бросить курить.

Более экономически важным является случай дефолта среди держателей ипотеки. Обычно он происходит потому, что домовладелец больше не может позволить себе ипотечные платежи в силу таких факторов, как безработица или развод. Однако, при снижении цены на жилье до уровня, когда дом стоит меньше, чем ипотека, домовладелец также может решить выйти из договора ипотеки, что известно как стратегический дефолт.

В работе (Guiso et al., 2009) проанализированы данные ежеквартального опроса репрезентативной выборки домохозяйств США с декабря 2008 по сентябрь 2010 года для определения отношения домовладельцев к стратегическому дефолту. Результаты показали, что примерно 30% респондентов заявили, что они пойдут на дефолт при дефиците больше, чем $100K, и большинство (64%) сказали, что они пойдут на дефолт при дефиците больше $200K. Однако фактическая статистика выкупа рисует совсем другую картину. К середине 2009 года более 16% домовладельцев США имели отрицательный (equity) собственный капитал, превышающий 20% от стоимости их дома, и более 22% домовладельцев имели отрицательный собственный капитал (equity), превышающий 10% от стоимости их дома. Учитывая высокую стоимость домов на наиболее пострадавших рынках, многие из этих домовладельцев были «утоплены» на более чем $100 тыс. Если бы 30% из них выбрали стратегический дефолт, в соответствии с результатами опроса, он составил бы в общей сложности около 5% американских домовладельцев. Однако, в то время как к третьему кварталу 2009 года совокупный уровень просроченной задолженности по ипотечным кредитам достиг исторического максимума в 14%, лишь небольшая часть из них была стратегической. Другие исследователи (Bradley et al., 2015) оценили долю в диапазоне от 7,7% до 14,6%, что составило бы общую стратегическую ставку дефолта только от 1% до 2%. Согласно одной из оценок Федеральной резервной системы «средний заемщик не пойдет на стратегический дефолт до тех пор, пока собственный капитал не упадет до 62 процентов от стоимости их дома»[12] [13].

[12] White, 2010.
[13] Bhutta, Dokko & Shan, 2010.

На первый взгляд, такое поведение кажется иррациональным, поскольку даже с учетом различных затрат на обращение взыскания лучшим вариантом с узко утилитарной точки зрения часто будет дефолт. Поведенческие экономисты обычно объясняют такие эффекты, апеллируя к идее, что домовладельцы страдают от когнитивных предубеждений, которые приводят их к принятию плохих экономических решений, и существуют поведенческие модели, которые соответствуют данным, корректируя такие вещи, как нынешняя предвзятость и ставки дисконтирования. Однако это не объясняет тот факт, что даже когда домовладельцы могут видеть, что дефолт имеет экономический смысл – и скажут в опросе, что они пойдут на дефолт– они обычно отказываются делать это на практике. Вместо этого кажется, что основной мотивацией для пребывания в доме является желание избежать стыда и социальной стигмы, а также страх перед воспринимаемыми (и часто преувеличенными) последствиями дефолта (White, 2010). Другими словами, реакция обусловлена не столько когнитивными размышлениями, сколько мощным сочетанием эмоций. И тот факт, что эта комбинация вины и страха ощущается гораздо острее, когда фактически принимается решение остаться или переехать, в отличие от ответа на вопрос опроса, является причиной того, что наблюдаемые показатели дефолта намного ниже, чем можно было бы ожидать от расчетов, основанных либо на результатах опроса, либо на максимизации полезности.

Таким образом, ситуация аналогична описанному выше случаю разворота предпочтений, когда мы оцениваем возможность по-разному в зависимости от того, делаем ли мы фактический выбор или придумываем гипотетическую цену. Домовладелец, как правило, предпочитает воспринимаемую безопасность пребывания в своем собственном доме, даже если знает, что это финансово не оптимально. На него также влияет его чувство морали и социальные нормы о важности исполнения своих обязательств. (Банк, конечно, занимает совсем другую позицию, так как работает по рыночным нормам). В результате, как и большинство курильщиков, которые говорят, что хотят бросить курить, не делают этого, так и большинство домовладельцев, которые говорят при опросе о дефолте, не делают этого на практике.

Вместо корректировки поведенческих моделей более простым и элегантным объяснением является применение методов квантовой теории принятия решений, где функция притяжения учитывает контекстно-зависимые субъективные факторы, включая стыд, вину и страх. Это также имеет то преимущество, что является последовательной моделью, которая может быть применена для широкого круга явлений, в отличие от *ad hoc* модели, которая настроена на соответствие определенному набору данных.

Предположим, что стоимость пребывания в доме в течение определенного периода равна x_1, а стоимость дефолта, включая аренду на тот же период, равна x_2. Согласно критерию реверсирования предпочтений, для выбора стратегического дефолта мы ожидаем, что соотношение затрат $\frac{x_2}{x_1}$ около 3. Оценка Федеральной резервной системы для критического порога для инициирования стратегического дефолта была 62% падением стоимости, что соответствует падению полезности по сравнению с ценой покупки в 2,63 раза. Учитывая, что большинство людей, по-видимому, предпочтут вернуть свой дом, а не арендовать, это согласуется с квантовой оценкой.

Квантовая теория принятия решений, и в частности, интерференция между объективными расчетами и субъективными эмоциями, помогает поэтому объяснить, почему так мало людей в подобных ситуациях на самом деле выбрали дефолт, даже если их поведение, похоже, бросает вызов как классической теории полезности, так и результатам опросов: когда дело дошло до разрыва, запутанные эмоции, такие как вина и страх, вмешались и перевесили абстрактные соображения полезности. Возможно, главный посыл заключается в том, что для сложной проблемы стратегического дефолта расхождение между максимизацией полезности и наблюдаемым поведением настолько велико, что стандартные расчеты полезности – несмотря на основополагающую роль, которую они играют в основной экономике – имеют довольно малое значение.

5. Квантовый гармонический генератор

Как было показано выше, ключевая идея квантового подхода заключается в том, что точечные объекты заменяются квантовыми состояниями или волновыми функциями, а наблюдаемые величины заменяются собственными значениями операторов. Эта процедура «квантования»" относительно проста для статических моделей, подобных рассмотренным выше, но становится значительно более сложной для динамических систем.

Одним из ключей к решению задачи квантования является тот факт (впервые обнаруженный математиком Оливером Хевисайдом в конце XIX века), что дифференциальные операторы действуют в некоторых отношениях подобно обычным числам. Рассмотрим для примера уравнение

$$y + \frac{dy}{dx} = x^2 .$$

Определим дифференциальный оператор D как $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$, so $\mathrm{Dy} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$. Действия D интерпретируются как высшие производные, так

$$\mathrm{D}^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}$$

и так далее. Тогда приведенное выше уравнение можно записать

$$(1 + D)y = x^2$$

тогда

$$y = \frac{x^2}{1+\mathrm{D}}.$$

Перезапись $\frac{1}{1+\mathrm{D}}$ как бесконечного ряда

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 \dots$$

дает

$$y = (1 - D + D^2 - D^3 \dots) = x - 2x + 2$$

после применения к x производных операторов и учитывая, что все производные выше второй равны нулю.

Поскольку операторы действуют на объект справа от них, эти два элемента обычно не коммутируют. Предположим, что у нас есть функция $\psi(x)$ и вычислим

$$D(x\psi) = D(x)\psi + xD(\psi) = \psi + xD(\psi),$$

тогда

$$D(x\psi) - xD(\psi) = D(x)\psi - xD(\psi) = \psi$$

или в форме оператора

$$Dx - xD = 1,$$

где 1-оператор идентификации, который ничего не делает. Коммутатор для двух элементов f и g определяется как $[f, g] = fg - gf$, поэтому здесь мы можем написать $[D, x] = 1$. Такие отношения коммутатора играют важную роль в квантовой механике. Нужно быть осторожным с порядком операций, при квантовании системы сначала может быть неясно, какой порядок использовать.

Теперь мы хотим представить квантовые состояния с помощью волновых функций. Многие эксперименты предполагают, что волны имеют периодичность, которая масштабируется с импульсом, таким образом, зависящим от приведенной постоянной Планка $\hbar$. Если фокусироваться на пространственном изменении, то типичная волновая функция может иметь вид

$$\psi(x) = e^{-\frac{\mathrm{ipx}}{\hbar}}.$$

В классической механике x будет относиться к пространственной координате, а p – к импульсу. Если мы определим $\hat{p}$ как дифференциальный оператор и применим его к ψ, то получим

$$\hat{p}\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}} = \hat{p}e^{-\frac{ipx}{\hbar}} = p\psi,$$

поскольку наблюдаемое p является собственным значением оператора. Поэтому мы можем определить $\hat{p}$ как оператор импульса. Оператор положения $\hat{x}$ возвращает значение x. В «пространстве импульсов», его можно определить как

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}},$$

где x имеет собственное значение. Аналогичная зависимость (связанная с требованиями теории относительности) имеет место для полной энергии H и времени t:

$$\widehat{H} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}.$$

Используя определение оператора импульса и правило умножения в исчислении, имеем

$$\hat{x}\hat{p}\psi - \hat{p}\hat{x}\psi = \hat{x}\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}\right) + i\hbar\frac{\partial(\hat{\mathrm{x}}\psi)}{\partial \mathrm{x}} =$$

$$= -\hat{x}\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}\right) + i\hbar\left(\hat{\mathrm{x}}\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial\hat{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}}\psi\right) = i\hbar\frac{\partial\hat{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}}\psi.$$

Но так как $\frac{\partial\hat{x}}{\partial x} = 1$, отсюда следует $\hat{x}\hat{p}\psi - \hat{p}\hat{x}\psi = \mathrm{i}\hbar\psi$, а поэтому коммутатор удовлетворяет соотношению $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = \mathrm{i}\hbar$. Это известно как каноническое отношение коммутатора, имеющее место также для других пар, таких как энергия и время.

Чтобы лучше понять, как работает процедура квантования, мы можем применить этот метод к простому физическому примеру – гармоническому осциллятору[14]. Мы выбрали его, потому что он играет ключевую роль в квантовой теории поля, которая лежит в основе методов, используемых позже для описания квантовой экономики; он служит первым приближением ко многим более сложным системам; и это одна из немногих квантовых систем, которые могут быть решены в уравнениях замкнутой формы.

Классический гармонический осциллятор включает в себя объект массы m, который колеблется вокруг центральной точки с пружинным восстановлением усилия, заданного равенством $\mathrm{F} = -\mathrm{kx}$, где k — постоянная, а x – смещение. Уравнение движения можно записать в терминах импульса как

$$p = m\dot{x}$$

$$\dot{p} = F = -kx$$

или эквивалентно $m\ddot{x} = -kx$. Это уравнение имеет колебательное решение

---

[14] Если процедура квантования кажется немного специальной и неудобной, одна из причин заключается в том, что мы пытаемся адаптировать классические математические инструменты для обработки двойственности волны/частицы. Во-вторых, подход был основан на интуиции, и уравнения были приняты не потому, что они могут быть доказаны, а потому, что они соответствуют данным (что дает некоторую свободу для социальных ученых адаптировать их для других целей).

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где фаза φ зависит от начальной точки. Энергия задается как

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

где $\omega = \sqrt{\mathrm{k/m}}$ – частота колебаний. Первый член представляет кинетическую энергию, а второй член – потенциальную энергию.

Чтобы квантовать систему, нам снова нужно заменить классические уравнения квантовыми версиями, которые действуют на волновые функции, но восстанавливают требуемые свойства наблюдаемых объектов[15]. В квантовой механике полная энергия задается уравнением, известным как Гамильтониан, выраженный теперь в терминах операторов. Поэтому мы пробуем:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Это можно написать более просто в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right),$$

где

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right).$$
$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

По причинам, которые станут ясны, $\hat{a}^\dagger$ известен как оператор рождения, $\hat{a}$ – оператор уничтожения, а $\hat{N}$ – оператор числа. Как видно из умножения этих операторов и использования отношения коммутатора между $\hat{x}$ и $\hat{p}$, операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническому отношению коммутатора с этим масштабированием, что есть

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1.$$

Если ψ – волновая функция с нормой 1, то

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = h\omega\left\langle\psi\right|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\left|\psi\right\rangle = \hbar\omega\langle\hat{a}\psi|\hat{a}\psi\rangle + \frac{\hbar\omega}{2} \geq \frac{\hbar\omega}{2},$$

так как любая норма не может быть меньше нуля.

Теперь предположим, что $|\mathrm{E}\rangle$ является нормализованным энергетическим состоянием системы. Поскольку наблюдаемые величины соответствуют собственным значениям, отсюда следует, что $|\mathrm{E}\rangle$ должен быть собственным вектором Гамильтонова оператора с соответствующим собственным значением E:

$\hat{H}|E\rangle = E\langle E|E\rangle.$

Из этого и вышеприведенного неравенства имеем

$$\langle E|\hat{H}|E\rangle = \langle E|H|E\rangle \geq E\,\frac{\hbar\omega}{2}.$$

Таким образом, система имеет минимальный уровень энергии, заданный $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Рассмотрим два состояния, определенные как

$$|\mathrm{E}_+\rangle = \hat{\mathrm{a}}^\dagger|\mathrm{E}\rangle,$$
$$|\mathrm{E}_-\rangle = \hat{\mathrm{a}}|\mathrm{E}\rangle,$$

Сначала отметим, что

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hat{H}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}),$$

поскольку вклад постоянного члена в Гамильтониан отменяется. Используя отношение коммутатора для операторов рождения и уничтожения, далее даем

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger.$$

Аналогично

$$[\hat{H}, \hat{a}] = \hbar\omega\hat{a},$$

а также

$$\hat{N}|E\rangle = \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)|E\rangle = \hat{N}_E|E\rangle,$$

где $\hat{\mathrm{N}}_\mathrm{E} = \frac{\hat{\mathrm{H}}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ – собственное значение оператора числа, связанное с этим энергетическим состоянием.

---

[15] I am drawing on: Barton Zwiebach. 8.05 Quantum Physics II. Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Тогда

$$\hat{H}|E_+\rangle = \hat{H}\hat{a}^\dagger|E\rangle = \left([\hat{H},\hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger H\right)|E\rangle = (\hbar\omega + E)\hat{a}^\dagger|E\rangle = (E+\hbar\omega)|E_+\rangle$$
$$\hat{H}|E_-\rangle = \hat{H}\hat{a}|E\rangle = \left([\hat{H},\hat{a}] + \hat{a}H\right)|E\rangle = (-\hbar\omega + E)\hat{a}|E\rangle = (E+\hbar\omega)|E_-\rangle.$$

Таким образом, при $\mathrm{E}_+ = \mathrm{E} + \hbar\omega$ и $\mathrm{N}_{\mathrm{E}_+} = \mathrm{N}_\mathrm{E} + 1$ энергетическое состояние имеет повышенный энергетический уровень, в то время как при $\mathrm{E}_- = \mathrm{E} - \hbar\omega$ и $\mathrm{N}_{\mathrm{E}_-} = \mathrm{N}_\mathrm{E} - 1$ энергетическое состояние имеет пониженный энергетический уровень.

Причина, по которой $\hat{a}^\dagger$ называется оператором рождения, $\hat{a}$ – оператором уничтожения, заключается в том, что эти операторы повышают или понижают энергию на $\hbar\omega$ и оператор числа на единицу. Оператор рождения всегда может быть применен для повышения энергии, но оператор уничтожения может быть применен только к энергетическим уровням выше базового уровня, поскольку энергия не может быть отрицательной.

Найти самый низкий базовый уровень можно, предположив, что существует нетривиальное состояние $|E\rangle$, уничтожаемое $\hat{a}$, поэтому $\hat{a}|E\rangle = 0$. Таким образом, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|E\rangle = N|E\rangle = 0$, что означает для этого энергетического состояния $E = \frac{\hbar\omega}{2}$ и $N_E = 0$. Мы можем вывести уравнение для этого состояния, действуя с позиции x:

$$\langle x|\hat{a}|E\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2h}}\left\langle x\middle|\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)\middle|E\right\rangle = 0.$$

Если мы определим волновую функцию $\psi_E(x) = \langle x|E\rangle$ и используем определение $\hat{p}$ в качестве дифференциального оператора, то это дает

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)\psi_E(x) = 0$$

или

$$\frac{d\psi_E}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_E$$

с решением

$$\psi_E(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right),$$

которое является гауссовым распределением с центром в 0. Существование этого основного состояния отражает принцип неопределенности в том смысле, что осциллятор без энергии не может существовать (потому что тогда мы знали бы, что энергия равна нулю) и не имеет классического аналога. Более высокие энергетические состояния являются более сложными и могут быть определены путем последовательного применения оператора рождения.

Другой способ выразить это с помощью оператора. Обозначим состояния $|n\rangle$ с соответствующим собственным значением n, тогда $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$. Основное состояние равно $|0\rangle$ (что не совпадает с нулевым вектором). Следующее состояние $|1\rangle$ получается действием оператора создания на $|0\rangle$,

$$|1\rangle = \hat{a}^\hbar|0\rangle$$

и

$$\hat{N}|1\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \left(\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)|0\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle = 1,$$

где мы использовали $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ и а $\hat{a}|0\rangle = 0$. Уравнения для более высоких энергетических состояний могут быть получены рекурсивно, чтобы дать

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle.$$

Состояния $|n\rangle$ образуют ортонормированный базис, поэтому любое состояние может быть описано в терминах линейной комбинации этих состояний.

Можно также рассчитать ожидаемые значения величин для различных энергетических уровней. Некоторые алгебры, использующие операторы рождения и уничтожения, показывают, что

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\langle n\middle|\hat{a} + \hat{a}^\dagger\middle|n\right\rangle = 0$$
$$\langle n|\hat{p}|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger - \hat{a}\middle|n\right\rangle = 0$$
$$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\middle|\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)^2\middle|n\right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\langle n|\hat{p}^2|n\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}\left\langle n\middle|\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)^2\middle|n\right\rangle = m\omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Поэтому неопределенности в положении и импульсе удовлетворяют

$$\Delta x\Delta p = \sqrt{\langle n|\hat{x}^2|n\rangle}\sqrt{\langle n|\hat{p}^2|n\rangle} = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{1}\right) \geq \frac{\hbar}{2m\omega},$$

это принцип неопределенности Гейзенберга.

Другим полезным оператором является оператор перевода, определенный как

$$T_{x_0} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0},$$

он действует на состояние $|\psi\rangle$, перемещая его на величину x_0. Чтобы убедиться в этом, пусть ожидаемое значение x в состоянии $|\psi\rangle$ есть

$$\langle\hat{x}\rangle_\psi = \sqrt{\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle}$$

и ожидание $\hat{x}$ в состоянии $\mathrm{T}_{\mathrm{x}_0}|\psi\rangle$ есть

$$\langle\hat{x}\rangle_{T_{x_0}|\psi} = \langle\psi|T_{x_0}^\dagger \hat{x} T_{x_0}|\psi\rangle = \left\langle\psi\middle|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0}\hat{x}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0}\middle|\psi\right\rangle.$$

Выражение, включающее скобки, может быть решено, что дает

$$\langle\hat{x}\rangle_{T_{x_0}|\psi} = \left\langle\psi\middle|\hat{x} + \frac{i}{\hbar}[\hat{p},\hat{x}]x_0\middle|\psi\right\rangle = \hat{x} + x_0,$$

как и ожидалось[16].

Если оператор трансляции применяется к основному состоянию $|0\rangle$, то новое состояние называется когерентным состоянием и может быть выражено в терминах операторов рождения и уничтожения следующим образом:

$$|\hat{x}_0\rangle = T_{x_0}|0\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{p}x_0\right)|0\rangle = \exp\left(\frac{x_0}{\sqrt{2d}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\right)|0\rangle,$$

или же

$$|a\rangle = D(a)|0\rangle,$$

где $d = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ шкала длины, $\alpha = \frac{x}{\sqrt{2}d}$, и

$$\mathrm{D}(a) = \exp\left(a\hat{a}^\dagger - a^*\hat{a}\right)|0\rangle$$

известен как оператор перемещения. Когда α реально, как здесь, смещение происходит только в положении, а мнимые значения соответствуют смещению по импульсу.

Расчет показывает, что полная энергия переведенной системы увеличивается относительно энергии основного состояния на величину $\frac{1}{2}m\omega^2x_0^2$, что имеет смысл, поскольку соответствует классической потенциальной энергии частицы на пружине, растянутой на величину x^0. Однако система не находится в едином энергетическом состоянии, а имеет вид

$$|\hat{x}_0\rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle.$$

Вероятность получения энергии, равной $\mathrm{E_n}$, равна $c_n^2 = \frac{\lambda}{n!}e^{-\lambda}$, что есть распределение Пуассона со средним $\lambda = \frac{m\omega x_0^2}{2\hbar}$.

До сих пор мы рассматривали систему только в статическом смысле. Чтобы изучить, как волновая функция $|\psi\rangle$ развивается со временем, мы пишем

$$|\psi\rangle_t = \widehat{U}(t,t_0)|\psi\rangle_{t_0},$$

где $\widehat{U}(t,t_0)$ – унитарный линейный оператор, который можно рассматривать как вращение гиперпространства всех возможных состояний в гильбертовом пространстве. Взятие производной по времени дает

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t = \frac{\partial\widehat{U}(t,t_0)}{\partial t}|\psi\rangle_{t_0}.$$

Использование того (легко проверяемого) факта, что

$$\widehat{U}(t_0,t) = \widehat{U}^{-1}(t,t_0) = \widehat{U}^\dagger(t,t_0),$$

далее дает

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t = \frac{\partial\widehat{U}(t,t_0)}{\partial t}\widehat{U}^\dagger(t,t_0)|\psi\rangle_t.$$

Напомним, что

$$\widehat{H} = -i\frac{\partial}{\partial t},$$

дает уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t = \widehat{H}(t)|\psi\rangle_t,$$

---

[16] Используя тождество Бейкера-Хаусдорфа $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \ldots$ где все члены за исключением двух первых уничтожаются.

которое может быть решено аналогично классической версии, чтобы показать, что операторы удовлетворяют тем же колебательным уравнениям движения.

Подводя итог, квантовая модель предсказывает, что наблюдаемые энергетические уровни гармонического осциллятора будут равномерно распределены с интервалом $\hbar\omega$ и минимальным значением до измерения, система будет находиться в состоянии суперпозиции вида $|\psi\rangle = \sum_n A_n|n\rangle$, где A_n – комплексные числа, а $\mathrm{w_n} = |A_n|^2$ – вероятность того, что осциллятор находится в состоянии $|n\rangle$. Эволюция состояния может быть решена с помощью уравнения Шредингера.

В качестве физического примера гармонического осциллятора можно рассматривать двухатомную молекулу, такую как молекула водорода H_2, как два атома, соединенных пружиной. Экспериментальные наблюдения показывают, что такие молекулы поглощают и испускают фотоны, частоты которых кратны частоте осциллятора, как и ожидалось. Многие другие физические системы, такие как вибрация молекул в твердом теле, могут быть аналогично аппроксимированы как система квантовых гармонических осцилляторов, поскольку предположение о линейной силе можно рассматривать как оценку первого порядка динамики вблизи минимумов потенциальной ямы. Самое главное, оказывается то, что уравнения, описывающие электромагнитные поля в квантовой физике, подобны уравнениям гармонического осциллятора с частицами, соответствующими фотонам, и основным состоянием, соответствующим энергии пустого пространства. Именно эта энергия питает появление «виртуальных фотонов», которые передают электромагнитную силу. В экономике, как показано ниже, версия осциллятора также может быть использована для моделирования динамики спроса и предложения и является основным элементом квантовых финансов.

В более общем смысле это идея представления квантовой системы как совокупности частиц, которые могут быть добавлены, удалены или переведены с помощью операторов. Действительно, другая интерпретация квантовой модели – известная как представление пространства Фока – заключается в том, что гармонический осциллятор представляет собой не одну частицу, а совокупность n фиктивных частиц, каждая из которых имеет энергию $\hbar\omega$. На этой картине операторы рождения и уничтожения рассматриваются как добавление и удаление этих частиц. Состояние земли или вакуума $|0\rangle$ не имеет частиц, $|1\rangle$ имеет одну частицу, $|2\rangle$ имеет две и так далее. Этот метод, известный как второе квантование, лежит в основе квантовой теории поля релятивистских частиц, используемых, например, для представления систем бозонов. Как видно из следующего раздела, он также может быть применен к таким вещам, как активы, где здесь n относится к числу удерживаемых единиц.

Другая переносимая на экономику вещь – это различная природа классических и квантовых систем. В то время как классический гармонический осциллятор – это просто вес, подпрыгивающий на пружине, где такие величины, как положение, импульс и энергия, могут быть точно вычислены, квантовая версия лучше описывается с точки зрения потенциальности. Мы можем только вычислить вероятность того, что измерение даст определенный результат; а сложность квантового поведения означает, что даже это может быть легко сделано только для относительно простых систем. В экономике это ставит сильный предел тому, сколько можно получить от использования редукционистских методов.

6. Квантовый рынок

В приведенных выше примерах мы видели, что когнитивное состояние человека, или состояние квантового гармонического осциллятора, может быть смоделировано как элемент гильбертова пространства. Кроме того, отдельные частицы, находящиеся в наложенных состояниях, можно рассматривать в двойном смысле как совокупность фиктивных частиц в отдельных состояниях. Мы можем сделать нечто подобное для экономики в целом и смоделировать ее как совокупность взаимодействующих частиц в гильбертовом пространстве. В качестве отправной точки мы рассмотрим упрощенный финансовый рынок. Я буду следовать здесь подходу, описанному покойным физиком-теоретиком Рутгерсом Мартином Шаденом в статье 2002 года о квантовых финансах, см. эту статью для деталей и приложений.[17]

Предположим, что рынок состоит из совокупности агентов (инвесторов) $j = 1,2,\dots,J$, покупающих и продающих активы типов $i = 1,2,\dots,I$. Каждый агент имеет наличные деньги (или долг) x^j. Рынок может быть представлен как гильбертово пространство H, с базисом

$$B \coloneqq \left\{|x^j, \left\{n_i^j(s) \geq 0, i = 1,..,I\right\}, j = 1,..,J\right\}.$$

Здесь $n_i^j(s)$ – количество активов i с ценой s долларов, принадлежащих инвестору j.

Индивидуальное базисное состояние представляет собой рынок, где цена каждой ценной бумаги и денежная позиция каждого агента точно известны. Базисные состояния ортогональны в том смысле, что если рынок находится в состоянии $|m\rangle$, то он не может быть в другом состоянии $|n\rangle$, поэтому если $m \neq n$, то скалярное произведение $\langle m|n\rangle = 0$. В общем случае состояние рынка (волновая функция) M никогда не известно точно и вместо этого представлено линейной суперпозицией базисных состояний $|n\rangle$ в B:

$$|M\rangle = \sum_n A_n\,|n\rangle,$$

где A_n – комплексные числа, а $w_n = |A_n|^2$ – вероятность того, что рынок находится в состоянии $|n\rangle$.

---

[17] Schaden, M. (2002), ‘Quantum finance’, Physica A 316(1), pp. 511-538.

Фазы A_n остаются неопределенными на этом этапе, но являются ключом к пониманию таких эффектов, как интерференция. Как и в квантовой физике, эти эффекты легче увидеть при рассмотрении отдельных транзакций. Склонности каждого агента к покупке или продаже актива сами по себе могут быть смоделированы как квантовые явления, которые, как уже обсуждалось, испытывают интерференционные эффекты, и они могут взаимодействовать, чтобы повлиять на рынок в целом. Мы вернемся к этому ниже.

Если мы определим основное состояние $|0\rangle$ как рынок, на котором агенты не держат никаких активов, включая денежные средства, то мы можем построить реальный рынок, передавая агентам денежные средства и активы. Этот подход аналогичен тому, который используется в квантовой механике многих тел для моделирования поведения набора бозонов, поэтому доли добавляются или удаляются из учетной записи агента с помощью оператора рождения $\hat{a}_i^{\dagger j}(s)$ и оператора уничтожения $\hat{a}_i^{j}(s)$. Создание денег осуществляется с помощью оператора перевода формы

$$\hat{c}^{\dagger j}(s) = exp\left(-s\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

что увеличивает количество наличных денег, удерживаемых агентом j, на s единиц валюты. Аналогично Эрмитов сопряженный оператор $\hat{c}^{j}(s) = \hat{c}^{\dagger j}(-s)$ понижает денежное содержание агента j на сумму s.

Хотя это может быть неочевидно из этих сухих уравнений, и мы не рассматривали такие факторы, как создание денежных объектов через выпуск долга, деньги все еще имеют очень особую (но обычно заниженную) роль в квантовой модели. В отличие от других активов, они имеют стабильную определенную цену. В первую очередь, без денег невозможно назначить цену другим активам. Тот факт, что эти активы имеют неопределенную стоимость, придает деньгам их дуалистические свойства, сочетая в себе как стабильные числа, так и нестабильные значения. Хотя актив не может иметь отрицательную цену, агент может иметь отрицательную сумму денег. Наконец, деньги часто создаются в первую очередь за счет кредитов, которые приводят к запутыванию, как описано ниже.

Покупка и продажа одной единицы актива агентом j по цене s представлена операторами рождения и уничтожения в сочетании с денежными переводами, которые отражают обмен денег:

$$\hat{b}_i^{\dagger j}(s) = \hat{a}_i^{\dagger j}(s)\hat{c}^{j}(s),$$
$$\hat{b}_i^{j}(s) = \hat{a}_i^{\dagger j}(s)\hat{c}^{\dagger j}(s).$$

Мы можем построить произвольное состояние рынка из состояния вакуума, используя эти операторы для последовательной передачи денежных средств и ценных бумаг каждому агенту. Чтобы изучить, как волновая функция рынка развивается со временем, мы пишем

$$|M\rangle_t = \hat{U}(t,t_0)|M\rangle_{t_0},$$

где $\hat{U}(t,t_0)$ – унитарный линейный оператор. Динамическое поведение системы определяется Гамильтонианом $\hat{H}(t)$, который снова удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}|M\rangle_t = \hat{H}(t)|M\rangle_t.$$

Затем можно разработать Гамильтонианы для таких вещей, как денежный поток, торговля ценными бумагами и т. д. (Хотя математика обычно сложнее, чем для чего-то вроде гармонического осциллятора). Как показали Schaden и другие исследователи, они, в свою очередь, могут быть использованы для получения статистических свойств рынков.

Переменные этой системы могут быть свободно интерпретированы в терминах физических аналогий. Цены актива (или, точнее, его логарифм) подобны позиции. Как и в физике, существует отношение неопределенности, включающее цену актива и импульс изменения цены. Создание денег или активов добавляет энергию (измеренную Гамильтонианом) к общей энергии системы. Те же самые методы, используемые для изучения многочастичных квантовых систем, могут затем применяться для предсказания поведения рынка либо в закрытой форме, либо путем явного моделирования каждого агента.

В качестве простого примера Гамильтониана в финансах рассмотрим случай сберегательного инструмента, содержащего начальную сумму денежных средств x_0, которая накапливается по процентной ставке r. Классическим Гамильтонианом для этой системы является $H = rxq$, где (в классической нотации) q-сопряженная переменная x.[18] Тогда мы имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} = rx$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -rq.$$

Решение тогда дает

$$x = x_0e^{rt}$$
$$q = q_0e^{-rt},$$

[18] Смотри также Bensoussan, A., Chutani, A. & Sethi, S. (2009), ‘Optimal Cash Management under Uncertainty’, Operations Research Letters 37:425-429.

из чего следует, что Гамильтониан постоянен во времени:

$$H = rxq = rx_0 e^{rt} q_0 e^{-rt} = rx_0 q_{0.}$$

Обратите внимание, что изменение q_0 не влияет на результат для x, поэтому мы можем установить $\mathrm{q}_0 = 1$, тем самым $q = e^{-rt}$ – это стоимость одной единицы валюты, приведенная к моменту $t = 0$.

По аналогии с физической системой количество денег x можно интерпретировать как имеющее размерность длины L. Импульс $\mathrm{q} = \mathrm{m}\dot{\mathrm{x}}$ имеет единицы MLT^{-1} (масса, умноженная на скорость за время), сила, действующая на импульс $s = \dot{\mathrm{q}} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}}$, имеет единицы MLT^{-2}, а работа, выполняемая силой, имеет единицы $\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$. Поскольку система взрывается по размеру (поэтому становится менее плотной) без ввода энергии, член инерционной массы не является постоянным, а уменьшается экспоненциально, с решением $m = m_0 e^{-2rt}$, где $m_0 = \frac{q_0}{rx_0}$. Как и в ядерном реакторе, масса преобразуется в другую форму энергии.

Чтобы квантовать систему, мы снова заменяем Гамильтониан H и классические переменные x и p операторами. Поскольку Гамильтониан должен быть Эрмитовым, мы должны записать его в симметричной форме как

$$\widehat{H} = \frac{r}{2}(\hat{x}\hat{q} + \hat{q}\hat{x}).$$

Затем можно использовать стандартные методы, чтобы показать, что распределение вероятностей денежных запасов соответствует тому, что ожидалось от классического случая (как отмечает Шаден, квантовый подход вступает в свои права только тогда, когда будущие доходы неопределенны). Можно провести аналогию с Гамильтонианом многозонной системы $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{N} + \frac{1}{2}\right)$. Процентная ставка r, которая, как и m, имеет единицы обратного времени, играет роль частоты (другой способ рассматривать ее как частоту фиксированного платежа), в то время как начальная инвестиция играет роль оператора числа $\widehat{N}$ (плюс $\frac{1}{2}$ вклад основного состояния). В случае однократного денежного перевода величины s в момент времени $t = t_0$ Гамильтониан становится $\widehat{H}(t) = s\delta(t - t_0)\hat{q}(t)$, где дельта функция $\delta(t - t_0)$ имеет значение 1 при $t = t_0$ и 0 в другие моменты времени.

Модель денежного потока рассматривает счет как черный ящик, который волшебным образом производит деньги по фиксированной ставке r. Нет никаких входов или выходов, поэтому Гамильтониан остается постоянным, даже когда номинальная сумма денег увеличивается бесконечно. В то время как такие изолированные системы не существуют в реальности, простая модель в сочетании с идеей рождения квантовых денег поучительна в том, как инфляция происходит в чем-то вроде рынка жилья. Как подчеркивается в книге, деньги создаются частными банками каждый раз, когда они выдают ипотеку. Если предположить, что ипотечное кредитование продолжается устойчивыми темпами, то денежная масса будет расти с некоторой скоростью r (на рисунке 3 в *Quantum Economics* денежная масса Канады растет с годовой скоростью около 6,5 процента, поэтому $r = 0{,}065$). Если эти деньги затем используются для повышения цен на дома, то рост цен на дома будет отслеживать рост денежной массы, даже если реальная стоимость домов остается неизменной.

Важное различие между наличностью и ценной бумагой заключается в том, что в то время, как деньги во время сделок сохраняются в постоянном количестве, купленная ценная бумага эволюционирует в суперпозицию состояний, каждое из которых имеет различные цены с амплитудами, определяющими вероятность продажи по этой цене. В качестве примера предположим, что конкретный инвестор изначально не имеет акций в конкретной компании, а затем приобретает одну акцию в момент времени 0 по цене s_0.[19] Сделав ряд упрощающих допущений и некоторые довольно сложные вычисления, Шаден показывает, что вероятность последующей продажи акции через время T по цене s следует логнормальному распределению, которое зависит от ожидаемой доходности и волатильности акции[20]. Это хорошо известный эмпирический результат, который может быть получен из стандартных стохастических подходов, поэтому служит, в первую очередь, в качестве проверки согласованности. Однако это справедливо только для промежуточных временных масштабов месяца или более, а также предполагает, что рынок находится вблизи равновесия. Квантовый подход помогает объяснить, как эта модель преломляется в более коротких временных масштабах или для активов, которые редко торгуются.

Подводя итоги этого раздела, можно представить рынок как гильбертово пространство, в котором цена актива точно известна только в момент совершения сделки. Владение и контекст важны, поэтому актив, купленный одним лицом по одной цене, отличается от того же актива, купленного другим лицом

[19] Начальное состояние $|M_0\rangle$ может быть описано $|M_0\rangle = \hat{b}^\dagger(s_0)|\widetilde{M}_0\rangle$, где $\hat{b}(s_0)|\widetilde{M}_0\rangle = 0$. Здесь для ясности были подавлены индексы для других акций и инвесторов, а $\widetilde{M}_0$ – состояние, в котором инвестора не имеет доли в компании (вот почему оператор аннигиляции достигает 0). В момент T, состояние эволюционирует в $\left|M_T\right\rangle = \widehat{U}(t, t_0)\left|M_0\right\rangle$. Вероятность того, что инвестор может продать одну акцию по цене s может быть вычислена при рассмотрении произведения $\left\langle\widetilde{M}_T\middle|\hat{b}(s)\middle|M_T\right\rangle$, где $\widetilde{M}_T$ – снова состояние, которое уничтожается $\hat{b}(s)$.

[20] Формула $P_T(s|s_0) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left[-\frac{\left(\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) - \mu T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right]$ где μ – ожидаемая отдача, а σ – волатильность.

по другой цене. Как и в квантовом познании, акт измерения цены актива – в данном случае путем покупки или продажи – оказывает влияние на цену. Построив соответствующее Гамильтоново уравнение, мы можем изучить динамику эволюции рынка. Как и в физике, сложность системы означает, что поведение макроуровня часто характеризуется эмерджентными свойствами, которые не могут быть сведены к некоторому более низкому уровню. Опять же, это отличается от классического подхода, который предполагает, что активы имеют определенную внутреннюю стоимость, независимую от контекста; деньги не играют важной роли, кроме как в качестве показателя; и расчеты могут быть основаны на микроосновах индивидуальной оптимизации полезности.

Как и квантовое познание, квантовые финансы стали значительной областью исследований, и многие работы показывают эмпирические результаты. Если предположить, что рынки велики и почти эффективны, то результаты, как правило, приближаются к результатам, полученным при классическом подходе. (Действительно, исследователи до сих пор в основном склонялись к соблюдению классических предположений, таких как эффективность, в попытке воспроизвести известные результаты.) Однако квантовые эффекты становятся более важными для рынков, которые торгуются тонко, и квантовый подход может также использоваться для описания рынков, управляемых настроениями инвесторов, где существует значительная степень запутанности между участниками рынка.

В то время как квантовые финансы концентрируются на специализированном случае финансовых рынков и используются для изучения свойств активов, таких как акции или облигации, та же самая методология в принципе может быть расширена для описания рынков в целом и служить основой математического описания квантовой экономики. Опять же, деньги играют особую роль как актив с фиксированной ценой, а цена всего остального неопределенна, пока не измеряется с помощью денежных операций.

References:

1. Автор Ahn K, Choi MY, Dai B, Sohn S and Yang B (2017). Modeling stock return distributions with a quantum harmonic oscillator. *EPL* 120(3) , 38003.
2. Baaquie BE (2007) *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates.* Cambridge: Cambridge University Press.
3. Bagarello F (2006) An operatorial approach to stock markets. *Journal of Physics A* 39 (22): 6823-6840.
4. Balvers R , Wu Y, and Gilliland E (2000). Mean Reversion across National Stock Markets and Parametric Contrarian Investment Strategies. *The Journal of Finance*, 55: 745-772.
5. Bouchaud J-P (2009). The (unfortunate) complexity of the economy. *Physics World*, 22, pp. 28–32.
6. Brogioli, Doriano. (2013). Violation of the mass-action law in dilute chemical systems. The Journal of chemical physics. 139(18): 184102.
7. Bromiley PA (2018) Products and Convolutions of Gaussian Probability Density Functions, Tina Memo No. 2003-003. Available from: http://www.tina-vision.net/docs/memos/2003-003.pdf
8. Busemeyer J and Bruza P (2012). *Quantum Models of Cognition and Decision* (Cambridge: Cambridge University Press).
9. Fama EF (1965). *Random walks in stock-market prices.* Chicago: Graduate School of Business, University of Chicago.
10. Fernández de Córdoba P, Isidro J, & Vázquez Molina J (2016). Schroedinger vs. Navier–Stokes. *Entropy* 18(1):34.
11. Fischer R & Braun, D (2003). Nontrivial bookkeeping: A mechanical perspective. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 324: 266-271.
12. Goldstein S, Hara T, & Tasaki H (2015). Extremely quick thermalization in a macroscopic quantum system for a typical nonequilibrium subspace. *New Journal of Physics* 17(4): 045002.
13. Gonçalves, C.P. & Gonçalves, C. (2008), 'An Evolutionary Quantum Game Model of Financial Market Dynamics − Theory and Evidence'. *Capital Markets: Asset Pricing & Valuation* 11(31).
14. Gusev M, Kroujiline D, Govorkov B, Sharov S, Ushanov D, Zhilyaev M (2015). Predictable markets? A news-driven model of the stock market, *Algorithmic Finance*, 4 (1-2), pp. 5-51.
15. Haven E, Khrennikov A & Robinson T (2017). *Quantum Methods for Social Science: A First Course*, New Jersey: World Scientific.
16. Höne KE (27 April 2017). Quantum Social Science. *Oxford Bibliographies*. Available at: http://www.oxfordbibliographies.com/view/document/obo-9780199743292/obo-9780199743292-0203.xml
17. Khrennikova P & Patra S (2019). Asset trading under non-classical ambiguity and heterogeneous beliefs. *Physica A* 521(C): 562-577.
18. Kondratenko, AV (2015). *Probabilistic Economic Theory*, Novosibirsk: Nauka.
19. Lecca P. (2013). Stochastic chemical kinetics : A review of the modeling and simulation approaches. *Biophysical reviews*, *5*(4), 323–345.
20. Meng X, Zhang J-W, Xu J, Guo H (2015), "Quantum spatial-periodic harmonic model for daily price-limited stock markets", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 438 (15), pp. 154-160.
21. Norwich KH (1993). *Information, sensation, and perception*. San Diego, CA: Academic Press.

22. Orrell D (2017). A Quantum Theory of Money and Value, Part 2: The Uncertainty Principle. *Economic Thought* 6(2): 14-26.
23. Orrell D (2018). *Quantum Economics: The New Science of Money*, London: Icon Books.
24. Orrell D (2018a). Quantum Economics. *Economic Thought* 7(2): 63-81.
25. Orrell D & Bolouri H (2004). Control of internal and external noise in genetic regulatory networks. *Journal of Theoretical Biology* 230(3):301-12.
26. Piotrowski E W & Sładkowski J (2001). Quantum-like approach to financial risk: Quantum anthropic principle. *Acta Physica Polonica*, B32, 3873–3879.
27. Piotrowski EW, Schroeder M & Zambrzycka A (2006). Quantum extension of European option pricing based on the Ornstein Uhlenbeck process. *Physica A*. 368: 176–182
28. Qadir A (1978) Quantum Economics. *Pakistan Economic and Social Review, 16*(3/4): 117–126.
29. Rae, AIM (2008), *Quantum Mechanics* (5th edn) (London: Taylor & Francis).
30. Ramsey S, Orrell D, Bolouri H (2005). Dizzy: stochastic simulation of large-scale genetic regulatory networks. *Journal of bioinformatics and computational biology* 3 (02), 415-436.
31. Ramsey S, Smith J, Orrell D, Marelli M, Petersen T, de Atauri P, Bolouri H, Aitchison J (2006), 'Dual feedback loops in the GAL regulon suppress cellular heterogeneity in yeast', *Nature genetics* 38(9): 1082.
32. Roos N (2014), Entropic forces in Brownian motion, American Journal of Physics 82(12): 1161-1166.
33. Schaden M (2002) Quantum finance. *Physica A* 316(1): 511-538.
34. Segal W & Segal IE (1998), The Black–Scholes pricing formula in the quantum context. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 95(7): 4072-4075.
35. Sokolov IM (2010) Statistical mechanics of entropic forces: disassembling a toy. *European Journal of Physics* 31: 1353–1367.
36. Titievsky K (2005) Lecture 14: Applications in Statistical Mechanics. Department of Chemical Engineering, MIT. https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-366-random-walks-and-diffusion-fall-2006/study-materials/lec14.pdf.
37. Wendt A (2015) *Quantum Mind and Social Science: Unifying Physical and Social Ontology.* Cambridge: Cambridge University Press.
38. Whelan J and Msefer K (1994). Economic Supply & Demand. MIT System Dynamics in Education Project. Available from: https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-988-system-dynamics-self-study-fall-1998-spring-1999/readings/economics.pdf
39. Williams PM (1980). Bayesian Conditionalisation and the Principle of Minimum Information, *The British Journal for the Philosophy of Science* 31(2): 131-144.
40. Yukalov VI & Sornette D (2014), Conditions for Quantum Interference in Cognitive Sciences. *Topics in Cognitive Science* 6: 79-90.

David Orrell, (leonorrell@yahoo.com)

Ключевые слова

Ключевые слова: квантовая экономика, квантовые финансы, квантовое познание, энтропийные силы, гармонический осциллятор, квантовая агент-ориентированная модель

David Orrell, A quantum model of supply and demand

Keywords

quantum economics, quantum finance, quantum cognition, entropic forces, harmonic oscillator, quantum agent-based model

DOI: 10.34706/DE-2019-04-06
JEL Classification: D00, D80, G10

Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122928

Abstract

This document gives a technical introduction to some of the mathematics used in quantum economics and is intended as a supplement for the book *Quantum Economics: The New Science of Money*. quantum economics, such as the quantum theory of money and value, do not rely on equations. However, the quantum formalism *is* mathematical, so to fully exploit its ideas some mathematics is useful. The aim here is to sketch out the way in which the economy can be represented mathematically using the quantum formalism, show the advantages over the classical approach, and clarify what it means to say that the economy can be treated as a quantum system in its own right.

Перевод сделан по согласованию с автором на основе свободно распространяемой версии текста Orrell, D. Introduction to the mathematics of quantum economics, размещенного в открытом доступе по адресу http://www.postpythagorean.com/quantumeconomicsmath.pdf