

2.2. КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ БЛУЖДЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЦИОНОВ

Дэвид Оррелл

Финансовые рынки часто моделируются с помощью случайного блуждания, например, в биномиальной модели ценообразования для опционов, которая является дискретной версией формулы Блэка-Шоулза. В данной статье представлен альтернативный подход к ценообразованию для опционов, основанный на квантовой модели блуждания. Квантовое блуждание, которое включает в себя состояния суперпозиции и допускает такие эффекты, как интерференция, первоначально было разработано в физике, но также получило применение в таких областях, как когнитивная психология, где оно используется для моделирования динамических процессов принятия решений. Здесь показано, что квантовая модель блуждания захватывает ключевые аспекты поведения инвесторов, в то время как коллапсирующее состояние захватывает наблюдаемое поведение рынков. Полученная модель цены опциона довольно близко согласуется с классической моделью случайного блуждания, но помогает объяснить некоторые наблюдаемые аномалии. Этот метод также имеет то преимущество, что он может быть запущен непосредственно на квантовом компьютере.

1. Квантовые и классические блуждания

Один из ключевых инструментов количественных финансов – модель случайного блуждания цен активов. Термин «случайное блуждание» приписывают Пирсону (Pearson, 1905), проиллюстрировавшему его на примере пьяного человека, случайно идущего по открытому полю; однако на самом деле этот метод был впервые применен в финансах Башелье (Bachelier, 1900), в чьей докторской диссертации *Théorie de la Spéculation* изучалась покупка и продажа ценных бумаг на Парижской бирже. Башелье предпологал, что колебания цен случайны, а математическое ожидание прибыли равно нулю. Таким образом, история цен на акции напоминала так называемое броуновское движение пылевой частицы, когда она сотрясается при столкновении с отдельными атомами (в 1905 году Альберт Эйнштейн использовал аналогичные методы для моделирования этого эффекта и оценки размера атома). Башелье использовал эту модель для получения метода ценообразования для опционов, предоставляющих покупателю право купить или продать актив в будущем по фиксированной цене.

В свое время диссертации Башелье уделялось мало внимания, однако начали накапливаться эмпирические доказательства того, что фондовые рынки изначально непредсказуемы (Cowles, 1933) и демонстрируют броуновское статистическое поведение (Kendall, 1953; Osborne, 1958). Интерес к его работе еще больше возрос после того, как экономист Пол Самуэльсон наткнулся на копию дипломной работы бакалавра и договорился о переводе (Cootner, 1964). Модель случайного блуждания была ключевым источником вдохновения для гипотезы эффективного рынка Юджина Фамы, которую он представил в следующем году в своей докторской диссертации (Fama, 1965). Этот метод также обещал помочь найти то, что Самуэльсон назвал «Святым Граалем» ..., идеальной формулой для оценки и назначения цен опционов» (Clark, 1999).

Такая формула была позже разработана коллегами Фамы из Чикагского университета Фишером Блэком и Майроном Скоулзом, сотрудничавшим с Робертом Мертоном из Массачусетского технологического института (Black & Scholes, 1973). Основная идея модели Блэка-Шоулза состояла в том, что при наличии таких допущений, как рыночная эффективность, можно построить портфель с нулевым риском, постоянно торгуя акциями и опционами таким образом, чтобы они уравновешивали друг друга (так называемое динамическое хеджирование). В итоге цена опциона может быть выведена путем приравнивания хеджированной доходности к тому, что может быть заработано на безрисковом счете. Эта модель произвела революцию в мире финансов, но с тех пор ее недостатки становятся все более очевидными (Wilmott & Orrell, 2017), начиная с краха в 1998 году инвестиционной фирмы Long-Term Capital Management, партнерами которой были как Шоулз, так и Мертон.

В данной статье разрабатывается новая и альтернативная модель финансовых опционов, основанная на квантовой версии случайного блуждания. В последние годы квантовая методология была применена в ряде социальных наук, включая экономику, финансы и основы человеческого познания (Haven & Khrennikov, 2013; Wendt, 2015; Park, 2016; Höne, 2017). Квантовые модели успешно делают точные и непараметрические предсказания когнитивных явлений, таких как эффект порядка, когда порядок, в котором задаются вопросы, влияет на ответ (Wang et al., 2014), или изменение предпочтений, когда люди меняют свое мнение в зависимости от контекста (Yukalov & Sornette, 2015); и в целом предлагают экономный способ учета таких эффектов, как контекст, интерференция и запутанность, которые характеризуют многие из " когнитивных аномалий", изучаемых в когнитивной психологии и поведенческой экономике (Yukalov & Sornette, 2018; Busemeyer, Wang & Shiffrin, 2015).

Когнитивные процессы, конечно, очень важны в ценообразовании для опционов, поскольку они включают в себя взаимодействие между ожиданиями инвесторов относительно будущих цен активов и фактическими ценами активов, измеряемыми рыночными сделками. Например, если кто-то покупает опцион call (право купить акцию в будущем по определенной цене, известной как цена исполнения), это

обычно происходит потому, что у него «бычий» взгляд на будущую цену, мнение, подлежащее измерению только на дату исполнения. Он кажется несовместимым с моделью случайного блуждания, в которой предполагается, как и у Башелье, что ожидание прибыли равно нулю; или с идеей Фамы о рациональности и дальновидности участников рынка. Как мы увидим, квантовая модель позволяет приспособиться к этому разрыву.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 дан обзор квантовой версии случайного блуждания, известной как квантовое блуждание. В разделе 3 развита математика в терминах оператора подбрасывания монеты и оператора перевода, которые вместе описывают систему. В разделе 4 утверждается, что модель квантового блуждания отражает ключевые аспекты поведения инвесторов, этот метод применяется к проблеме ценообразования для опционов. В разделе 5 показано, как полученная квантовая опционная модель проливает свет на эмпирические явления, не охваченные классической моделью. В разделе 6 кратко излагаются основные моменты и обсуждаются некоторые возможные возражения против квантового подхода.

2. Случайное блуждание

Хотя использование модели случайного блуждания в финансах было отчасти вдохновлено ее успехами в физике и хотя ее «убедительная мотивация случайности уникальна среди социальных наук и напоминает о роли, которую неопределенность играет в квантовой механике» (Lo, 2008), любопытно, что единственный аспект квантовой физики, широко принятый в финансах, – это концепция случайности. На самом деле это даже имело место в специализированной области квантовых финансов, где квантовые методы используются для моделирования финансовых рынков. Например, уравнение Блэка-Шоулза можно выразить как вариант волнового уравнения Шредингера из квантовой механики (Baaquie, 2007), а Чен (Chen, 2002) использовал квантовую модель со свойствами, подобными квантовому блужданию, чтобы переосмыслить классический биномиальный метод ценообразования для опционов. Однако другие аспекты квантового поведения, такие как запутанность и интерференция, привлекли относительно мало внимания.

Этого не было в области квантового познания, которое использует квантовые методы для моделирования таких вещей, как принятие решений человеком. В отличие от классических моделей, где предполагается, что решения основаны на фиксированных предпочтениях, в квантовых моделях убеждения и предпочтения рассматриваются как волнообразные сущности, существующие в состоянии суперпозиции и «коллапсирующие» в определенное состояние только при опросе, действующем как процесс измерения, подобный процессу измерения в квантовой физике (Bussemeyer & Bruza, 2012). Одно из следствий – то, что психические состояния проявляют такие свойства, как интерференция (например, когнитивный диссонанс) и запутанность.

В работе (Orrell, 2020) утверждалось, что склонность покупателей и продавцов к участию в экономических транзакциях может быть смоделирована с помощью квантованных версий энтропийных сил. В случае ценовых переговоров эти силы представляют собой тенденцию к восстановлению цены до точки, максимизирующей вероятность совершения сделки. Аналогичным образом классическое случайное блуждание можно записать как энтропийную силу (Roos, 2014); однако в этом случае процесс можно квантовать непосредственно, используя квантовое блуждание.

В физике идея квантового блуждания восходит, по крайней мере, к Фейнману (Wang & Manouchehri, 2013), но впервые была развита в (Aharonov, Davidovich & Zagury, 1993). Разница между ней и ее классическим аналогом состоит в том, что вместо движения в пространстве положений со случайными шагами, которые определяются классической вероятностью, она включает в себя суперпозицию состояний, развивающихся во времени в соответствии с детерминированными квантовыми правилами. Поэтому система исследует множество возможных путей с амплитудами вероятности, включающими в себя эффекты интерференции.

В то время как классическое случайное блуждание предполагает случайность на каждом шаге, его квантовая версия детерминирована вплоть до заключительной стадии, когда результат свернут до определенного исхода. (По этой причине его обычно называют квантовым блужданием, а не квантовым случайным блужданием.) Эти две системы также ведут себя совершенно по-разному. В частности, дисперсия квантового блуждания растет квадратично со временем, а не линейно, как в классическом случае.

В физике и вычислительной технике интерес к квантовым блужданиям значительно возрос за последнее десятилетие, отчасти благодаря осознанию того, что они обеспечивают основу для квантовых вычислений (Чайлдс, 2009). Был разработан ряд алгоритмов квантовых вычислений для таких задач, как поиск баз данных (Childs & Goldstone, 2004), сетевая навигация (Sánchez-Burillo et al., 2012), шифрование изображений (Yang et al., 2015) и так далее. Было также обнаружено, что квантовые блуждания играют определенную роль в транспорте фотосинтетической энергии (Mohseni et al., 2008). Наряду с этими теоретическими моделями все больше внимания уделяется реализации квантовых блужданий в инженерных физических системах (Sephton et al., 2019).

Квантовое блуждание также нашло более релевантное экономическое применение в описании ряда когнитивных феноменов, таких как обнаружение сигналов (Bussemeyer & Bruza, 2012), присвоение людьми оценок стимулам (Wang & Bussemeyer, 2016) и общее принятие решений (Kvam et al., 2015; Martínez-Martínez & Sánchez-Burillo, 2016). Будь то в медицине, юриспруденции, военной стратегии, бизнесе или любой другой области, принятие решений – это динамичный процесс, в котором состояния веры взаимодействуют

с накоплением доказательств. В такой классической модели, как последовательный анализ, состояние принятия решения обновляется каждый раз, когда поступает новая информация (Gold & Shadlen, 2007). Шумовая природа доказательств создает случайную траекторию блуждания, подобную тому или иному варианту. В квантовой модели в любой момент времени, предшествующий окончательному решению, лицо, принимающее решение, находится в суперпозиции состояний, причем амплитуды вероятности каждого выбора развиваются согласованно. Таким образом, такие эффекты, как интерференция, играют определенную роль вплоть до момента принятия окончательного решения. С точки зрения нейронных процессов, квантовая модель блуждания соответствует массово параллельной когнитивной архитектуре, включающей в себя как кооперативные (возбуждающие), так и конкурентные (тормозящие) взаимодействия (Fuss & Navarro, 2013).

Например, Квам и др. (2015) продемонстрировали свою квантовую модель блуждания, используя психологический эксперимент, включавший выполнение конкретной задачи (оценивание движения точек на экране), а также просьбу оценить уверенность в своих решениях. Они обнаружили, что принятие решений вмешивается в суждения о доверии таким образом, чтобы сделать эти суждения более точными и менее экстремальными. В случае с финансовыми опционами ситуация несколько иная, поскольку люди просят сделать прогнозы относительно того, будет ли цена базового актива расти или снижаться в будущем. Поэтому представляется разумным, что убеждения инвесторов о будущем могут быть более экстремальными, чем реальность, поскольку такие убеждения по определению не подлежат фактическим измерениям, по крайней мере до тех пор, пока не наступит будущее. Действительно, если бы это было не так, и инвесторы думали, что цены на активы останутся стабильными, то не было бы никакого стимула покупать опционы. В следующем разделе представлена математическая основа квантового блуждания, предшествующая его применению к проблеме ценообразования для опционов.

3. Квантовая монета

Рассмотрим сначала классическое случайное блуждание по одномерной сетке, когда на каждом временном шаге ходок бросает сбалансированную монету и делает шаг влево (-1), если выпадает орел (H), и шаг вправо (+1), если выпадает решка (T). Существует 2^n различных путей из n шагов, а конечная позиция ходока будет находиться в диапазоне от $-n$ до n . Мы хотим определить вероятность $P_i(n+1)$, с которой ходок окажется после следующего шага в позиции i . Поскольку пути к этой точке возможны из позиции $i-1$ или $i+1$ на предыдущем шаге, мы можем записать:

$$P_i(n+1) = \frac{1}{2}[P_{i+1}(n) + P_{i-1}(n)].$$

В результате выполнения этого ряда шагов распределение вероятностей, показанное в Таблице 1 ниже, представляет собой треугольник Паскаля.

Вычитание $P_i(n)$ из левой и правой частей этого уравнения дает

$$P_i(n+1) - P_i(n) = \frac{1}{2}[P_{i+1}(n) - 2P_i(n) + P_{i-1}(n)].$$

Если мы определим дискретные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} &\equiv \frac{1}{2}[f_i(t+1) - f_i(t-1)] \\ \frac{\partial f_i}{\partial x} &\equiv \frac{1}{2}[f_{i+1}(t) - f_{i-1}(t)] \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} &\equiv f_{i+1}(t) - 2f_i(t) + f_{i-1}(t), \end{aligned}$$

тогда мы сможем записать

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}.$$

В этом уравнении неявно предполагается, что размер шага во времени или пространстве равен 1. В более общем случае, если предположить, что временной шаг равен τ , а размер каждого шага равен a , то масштабирование результата дает уравнение диффузии $\frac{\partial P_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}$ с постоянной диффузии $D = \frac{a^2}{2\tau}$.

Модель случайного блуждания в терминах когнитивной модели соответствует случаю, когда лицо, принимающее решение, выбирает случайное решение – например, двигаться влево или вправо – на каждом временном шаге. В квантовом познании мы моделируем психическое состояние лица, принимающего решение, используя квантовую волновую функцию, которая учитывает объективные и субъективные факторы и только при измерении коллапсирует до окончательного решения. Поэтому уместно спросить, каким образом начальная суперпозиция квантовых состояний может эволюционировать или диффундировать, проецируясь в будущее по квантовым правилам. Например, предположим, что вы думаете, что акции могут подняться в цене в следующем месяце. Если они действительно растут в первом месяце, то в следующем месяце 2 они также могут пойти вверх или вниз. Аналогично, за движением вниз в месяце 1 может последовать движение вверх или вниз в месяце 2; и так далее. Таким образом, диапазон возможностей расширяется во времени, как и в случае классического случайного блуждания. Но, как видно из квантового познания, тот факт, что противоречивые потенциальные состояния удерживаются в суперпозиции, приводит к интерференционным эффектам, изменяющим распределение вероятностей на каждом временном шаге.

Квантовая версия случайного блуждания состоит из двух частей: квантовой монеты и оператора трансляции (Кемпе, 2003). Первая играет роль подбрасывания монеты в классическом случайном блуждании, в то время как вторая определяет последствия броска, например, прибавляя положение влево или вправо. Разница, как мы увидим, заключается в том, что состояние системы не теряет информацию на каждом шаге, а переносит ее на следующий шаг в виде эволюционирующей волновой функции.

Гильбертово пространство \mathcal{H}_C для квантового подбрасывания монеты охватывается двумя базисными векторами, которые мы идентифицируем как $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подбрасывание монеты представлено Эрмитовым оператором R размерности 2×2 . Здесь мы будем использовать широко применяемую в квантовых вычислениях так называемую монету Адамара $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Можно показать, что все несмещенные операторы подбрасывания монет (по существу) эквивалентны монете Адамара (Kendon & Tregenna, 2003), некоторое пояснение см. в Приложении. Если мы используем начальное состояние $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, которое согласно правилу Борна имеет вероятность $1/2$ быть наблюдаемым в состоянии вверх $|\uparrow\rangle$ и вероятность $1/2$ быть наблюдаемым в состоянии вниз $|\downarrow\rangle$, то мы имеем, например

$$R|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что не является справедливым броском, потому что результат может наблюдаться только в направлении вверх.

Пусть теперь гильбертово пространство \mathcal{H} определено как тензорное произведение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$ где \mathcal{H}_C – пространство монеты, натянутое на $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, а пространство положения \mathcal{H}_P перекинуто на дискретный набор базисных состояний положения $\{|i\rangle; i \in \mathbb{Z}\}$. Мы определяем оператора перевода

$$T = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_i |i+1\rangle\langle i| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_i |i-1\rangle\langle i|,$$

который обладает эффектом сдвига положения i вверх (т. е. вправо) или вниз (влево) в зависимости от того, находится ли монета в состоянии вверх или вниз. Квантовое случайное блуждание N шагов определяется как преобразование U^N , где U задается как $U = T \cdot (R \otimes I)$. Другими словами, мы применяем оператор подбрасывания монеты R к текущему состоянию; применяем оператор преобразования для сдвига состояния позиции; и повторяем процесс N раз, причем измерение происходит только в конечном состоянии.

Мы можем записать волновую функцию на шаге n в виде

$$|\psi(n)\rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i(n)|\uparrow\rangle + b_i(n)|\downarrow\rangle) \otimes |i\rangle,$$

где $a_i(n)$ и $b_i(n)$ – коэффициенты для восходящей и нисходящей компонент. Если мы применяем оператор U с R , как определено выше, то коэффициенты становятся

$$a_i(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{i-1}(n) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_{i-1}(n)$$

$$b_i(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{i+1}(n) - \frac{1}{\sqrt{2}}b_{i+1}(n).$$

Распределение вероятности нахождения волновой функции либо вверх, либо вниз в позиции i можно найти, применив правило Борна, так что

$$P_i(n+1) = \frac{1}{2} \|a_{i-1}(n) + b_{i-1}(n)\|^2 + \frac{1}{2} \|a_{i+1}(n) - b_{i+1}(n)\|^2.$$

В качестве примера рассмотрим начальное состояние $\Phi_0 = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$. Применение подбрасывания монеты к состоянию монеты $|\uparrow\rangle$ дает $R|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$, таким образом, монета находится в состоянии суперпозиции. Далее мы применяем оператор преобразования, чтобы получить

$$U|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle$$

так, $P_{-1}(1) = \frac{1}{2}$ и $P_1(1) = \frac{1}{2}$. На следующем этапе,

$$\begin{aligned} U^2|\Phi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}U(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}U(|\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle) \end{aligned}$$

так $P_{-2}(1) = \frac{1}{4}$, $P_0(1) = \frac{1}{2}$ и $P_2(1) = \frac{1}{4}$. Продолжение дает

$$U^3|\Phi_0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle\otimes|3\rangle + 2|\uparrow\rangle\otimes|1\rangle + |\downarrow\rangle\otimes|1\rangle - |\uparrow\rangle\otimes|-1\rangle + |\downarrow\rangle\otimes|-3\rangle)$$

и так далее. Полученное распределение вероятностей для первых нескольких шагов показано в таблице 2 ниже, где столбцы представляют позицию i , строки представляют итерацию n , а числа нормированы на 2^n . Заметим, что в отличие от треугольника Паскаля (Таблица 1), распределение асимметрично с третьей итерации.

Таблица 1. Вероятность положения как функция положения i для классического случайного блуждания без помех. Вероятности на каждом шаге n нормируются по 2^n . Результаты в этом случае те же, что и в треугольнике Паскаля.

| $n \setminus i$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| 4 | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| 5 | 1 | | 5 | | 1 | | 1 | | 5 | | 1 |

Таблица 2. Вероятность положения как функция положения i для квантового блуждания с интерференцией. Вероятности на каждом шаге n нормируются по 2^n .

| $n \setminus i$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | 1 | | 5 | | 1 | | |
| 4 | | 1 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | |
| 5 | 1 | | 5 | | 4 | | 4 | | 1 | | 1 |

На рис. 1 показан график распределения вероятностей после 100 итераций. Поэтому интерференция оказывает огромное влияние на распределение, изменяя его от классического биномиального распределения до чего-то искаженного и нерегулярного. Дисперсия увеличивается квадратичным образом (Chandrashekar, Srikanth & Laflamme, 2008), и для больших n задается $\sigma^2 \cong \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)n^2$.

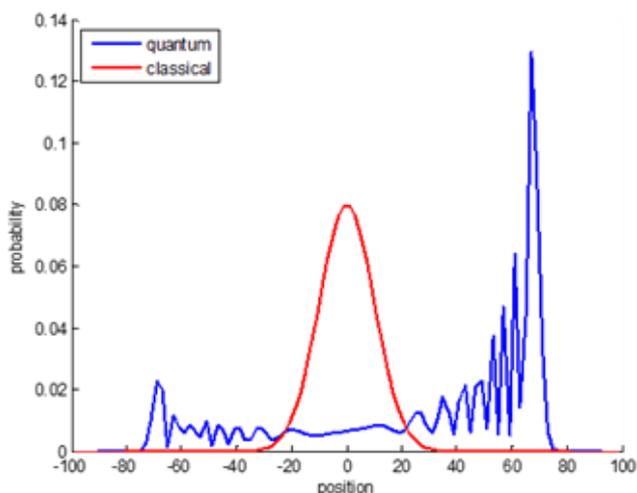


Рисунок 1. Синяя линия показывает распределение вероятностей для квантового случайного блуждания с использованием монеты Адамара и начального состояния $\psi = |\uparrow\rangle$. Красная линия показывает классическое биномиальное распределение.

Асимметрию можно устранить, выбрав сбалансированное начальное состояние. Для монеты Адамара установка начального состояния

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

дает симметричное распределение, показанное на Рис. 2.

Рисунок 2. Синяя линия показывает вероятностей для квантового случайного блуждания в 100 шагов с использованием монеты Адамара и начального состояния

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle.$$

Красная линия показывает классический случай.

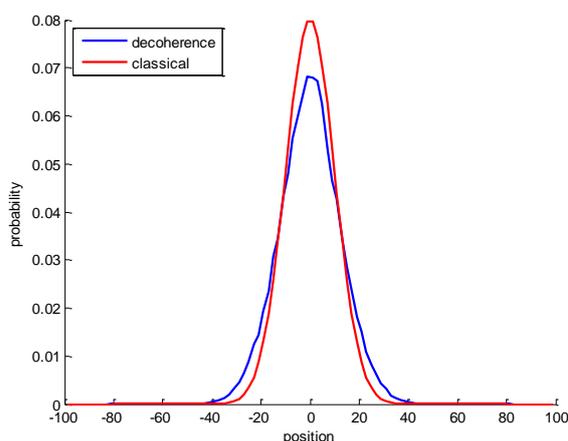
Распределение вероятностей также может быть выражено в терминах дискретных производных, как это было сделано выше для классического случайного блуждания, которое приводит (Romanelli et al., 2004) к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \beta_i}{\partial x}.$$

Здесь β_i – интерференционный член, определяемый как действительная часть $\psi_i(1)\psi_i^*(2)$, где ψ_i – значение двухкомпонентной волновой функции в положении i . Выражение в скобках соответствует телеграфному уравнению, которое используется для описания распространения волн в диссипативных средах.

Член $\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}$ соответствует, как было показано выше, диффузии классического случайного блуждания, а член $\frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2}$ соответствует распространению волны. Последнее может быть индуцировано в классическом случайном блуждании путем включения последовательной автокорреляции (Wilmott, 2013), однако даже при автокорреляции результирующая дисперсия все еще линейно масштабируется по времени. Поэтому уникальный вклад квантового блуждания, создающий квадратичный рост дисперсии, вносит член β_i .

Стоит отметить, что интерференция возникает потому, что пространственное измерение рассматривается как дискретное, а оператор преобразования T создает сдвиг +1 (вправо) или -1 (влево). Если бы сдвиг слегка менялся на каждом шаге, то состояния положения больше не были бы идеально выровнены, что устранило бы эффект интерференции. Между случаями с совершенной интерференцией и отсутствием интерференции существует также промежуточный случай, когда существует определенная степень интерференции, обусловленная, например, эффектом декогеренции. В этом случае дисперсия может быть показана как асимптотически линейная, как и в классическом случае (Brun, Carteret & Ambainis, 2003). Декогерентность может быть добавлена несколькими способами. Возможно, самым простым будет слегка возмущать оператор подбрасывания монеты на каждом шаге (см. Приложение). На рис. 3 показан ансамбль в среднем из 400 симуляций, где оператор подбрасывания монеты был несовершенным Адамаром



$$R_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\zeta} \\ e^{-i\zeta} & -1 \end{pmatrix},$$

где параметр ζ был случайным образом вычерчен на каждом шаге j из нормального распределения со средним значением 0 и стандартным отклонением 0,5 (Mackay et al., 2002). Если система измеряется на каждом временном шаге, то декогеренция завершена и квантовая модель коллапсирует в классический случай.

Рисунок 3. Красная линия показывает среднее значение ансамбля из 400 имитаций для несовершенной монеты Адамара со степенью декогеренции и начальным состоянием $\psi = |\uparrow\rangle$. Каждая имитация состоит из более чем 100 шагов. Красная линия показывает классический случай.

4. Квантовая биномиальная модель цены активов

Квантовое блуждание при использовании в качестве модели познания обладает рядом характеристик, отличающих его от классических моделей случайного блуждания. Одна из них заключается в том, что система имеет определенную степень импульса, поэтому запуск в конфигурации «вверх» приводит к искаженному распределению, в то время как сбалансированное начальное состояние создает бимодальное распределение. Последнее распределение, показанное на Рис. 2, напоминает волновую функцию квантового гармонического осциллятора в возбужденном состоянии и может быть сопоставлено с кривыми склон-

ности в (Orrell, 2020), которые представляют собой распределение цены для потенциальной сделки. Нерегулярный и неровный характер графика может показаться странным, но, как и в случае с квантовым осциллятором, на макроуровне имеет значение сглаженное поведение. Еще одной характеристикой квантовой модели является то, что дисперсия системы растет квадратично, а не линейно, что опять же согласуется с идеей линейного импульса, толкающего в ту или иную сторону. Наконец, система чувствительна к декогеренции и коллапсирует до классического случая, если измерение происходит на каждом временном шаге. Как всегда в квантовых системах, измерение влияет на измеряемое.

Применительно к теме колебаний цен на акции эта модель познания представляется вполне реалистичной. Как писал Башелье в своей диссертации (Bachelier, 1900), – «противоречивые мнения относительно этих колебаний настолько разделены, что в одно и то же мгновение покупатели считают, что рынок растет, а продавцы-что он падает». Покупатели опционов call предполагают, что цены будут расти с положительной динамикой, в то время как продавцы предполагают, что они снижаются. Однако «совокупность спекулянтов не должна верить в данный момент ни в рост цен, ни в их падение, поскольку на каждую котированную цену приходится столько же покупателей, сколько и продавцов». Таким образом, общее распределение должно быть примерно симметричным, но иметь два различных пика, представляющих покупателей и продавцов, которые коллапсируют только до одной точки данных, когда цена фактически измеряется. В то время как Башелье и последующие модельеры основывали свои модели на классическом случайном блуждании, квантовое блуждание представляется, таким образом, более точным представлением психологии инвесторов.

Как и в случае с Башелье, наш интерес здесь заключается в использовании квантового блуждания для моделирования эволюции (воображаемой или реальной) цены акций, чтобы оценить финансовые опционы. Начиная снова с классического подхода, в классической биномиальной модели (Cox, Ross & Rubinstein, 1979) мы предполагаем, что за один временной шаг цена акций имеет определенный шанс двигаться либо вверх, либо вниз. Таким образом, цена акции эволюционирует в соответствии с формулой $S_1 = S_0(1 + \delta)$, где $\delta = a$ с вероятностью $1 - p$ и $\delta = b$ с вероятностью p . Ожидаемая цена акции после одного шага равна

$$E(S_1) = S_0(1 - p)(1 + a) + s_0p(1 + b).$$

Если предположить, что $a < r < b$, где r – безрисковая ставка процента, и ожидаемая доходность акции равна r , то $(S_1) = S_0(1 + r)$, что дает $p = \frac{r-a}{b-a}$ и $1 - p = \frac{b-r}{b-a}$.

Теперь рассмотрим колл-опцион европейского типа с ценой исполнения K . Цена опциона, приведенная дисконтированием к нулевому моменту времени, может принимать два значения

$$V_1 = \frac{1}{1+r} [S_0(I+a) - K]^+$$

или

$$V_2 = \frac{1}{1+r} [S_0(I+b) - K]^+$$

с вероятностями $p = \frac{r-a}{b-a}$ и $1 - p = \frac{b-r}{b-a}$, соответственно. Таким образом, ожидаемая цена опциона будет $\langle V \rangle = pV_1 + (1 - p)V_2$. Эта дискретная модель сходится к модели Блэка-Шоулза при стремлении временного шага к нулю.

В квантовой версии мы следуем той же процедуре, что и для квантового случайного блуждания, но в выражении для оператора трансляции интерпретируем сдвиг вниз $|i - 1\rangle$ как «умножение цены акций S на $1 + a$ », а сдвиг вверх $|i + 1\rangle$. Как «умножение цены акций на $1 + b$ ». Для первого шага времени это можно записать как

$$T = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |S(1+b)\rangle\langle S| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |S(1+a)\rangle\langle S|.$$

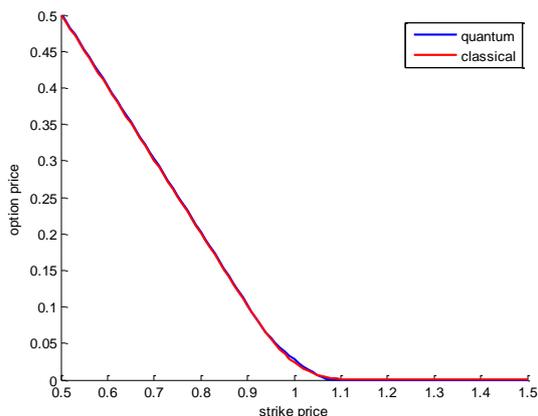
Тогда цена опциона после N итераций равна

$$\langle V \rangle = \frac{1}{(1+r)^N} [S_N - K]^+.$$

Один из способов получить желаемый ожидаемый доход заключается в том, чтобы ввести степень смещения монеты, либо изменив начальное состояние, либо изменив оператор подбрасывания монеты. Однако добавление любой декогеренции также имеет тенденцию устранять эффект смещения. Более простой подход заключается в предположении, что вероятность движения вверх или вниз равна $p = 0,5$, но можно получить ожидаемый доход за один шаг $r = \frac{a+b}{2}$ и волатильность $v = b - a$, корректируя значения a и b . Например, если $r = 0.001$ и $v = 0.004$, то $a = r - \frac{v}{2} = -0.001$ и $b = r + \frac{v}{2} = 0.003$.

Поскольку, как уже было сказано, дисперсия в квантовой модели задается с хорошей точностью через $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})t^2$, а дисперсия в классической модели задается через t , откуда следует, что в квантовой модели параметр волатильности должен быть разделен на коэффициент $(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}})t$, чтобы дать ту же конечную дисперсию, что и классическая модель. Таким образом, этот параметр волатильности относится к эффективной внутренней волатильности, которую, как будет показано ниже, следует отличать от фактической измеряемой волатильности. Кроме того, временной шаг может быть масштабирован, чтобы дать ту

же конечную дисперсию, что дает значительный прирост скорости по сравнению с классическим методом, как и в алгоритмах квантового поиска (Grover, 1996).



На рисунке 4 показана цена опциона для различных значений цены исполнения, где начальная цена покупки равна 1, для квантового и классического случаев. Соглашение довольно близкое, особенно по сроку погашения 1 месяц. Как видно из приложения, этот метод может быть распространен на случай с несколькими активами. В следующем разделе более подробно сравниваются квантовая и классическая модели.

Рисунок 4. Графики зависимости цены опциона от цены исполнения при начальной цене покупки 1, годовой волатильности 20%, безрисковой процентной ставке 2% и сроке погашения 1 месяца (верхняя панель) и 6 месяцев (нижняя панель). Синяя линия показывает квантовую модель, красная линия показывает классический случай.

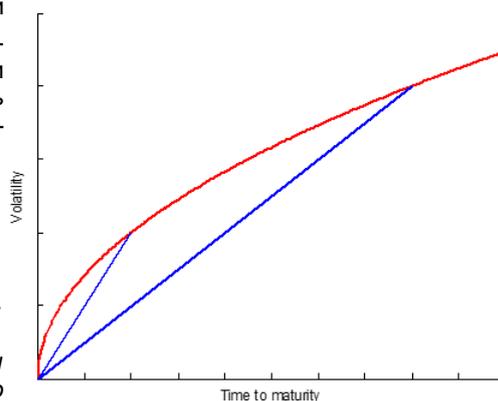
5. Обсуждение

Хотя полный эмпирический анализ данных о рыночных ценах выходит за рамки данной статьи, квантовая модель, по-видимому, действительно воспроизводит ряд стилистических свойств наблюдаемого поведения опционов. Они включают в себя зависимость цены опциона от времени до погашения и зависимость от цены исполнения.

Ключевое различие между моделированием цены опциона и цены базовой акции заключается в том, что опцион касается не фактической эволюции цены акции, а ее воображаемой возможной будущей эволюции. В классической модели случайного блуждания они рассматриваются как одно и то же, но в квантовом блуждании существует конфликт между ними. Например, как уже упоминалось выше, инвестор, который имел позитивное первоначальное представление об акции, может увидеть ее эволюцию, как показано на рисунке 1, с большим перекосом, указывающим на положительный импульс. Инвестор, придерживающийся негативной точки зрения, будет иметь ментальное состояние, которое является зеркальным отражением, и оба эти состояния вместе дадут симметричное распределение, подобное тому, что показано на Рис.2. Однако фактическая эволюция акций будет более близка к случаю с декогеренцией (Рис.3), где декогеренция обеспечивается регулярными измерениями через транзакции.

Тогда возникает вопрос, как эта несовместимость между внутренним психическим состоянием инвесторов и объективными показателями акций отражается на ценах опционов. Когда инвесторы рассматривают опционы с коротким сроком погашения, например месяц, то, если они «коллапсируют» свою внутреннюю (предполагаемую квантовую) ментальную модель и приспособят ее к наблюдаемой 1-месячной волатильности, они получают другой результат, чем если бы они сделали то же самое для опционов с более длительным сроком погашения D (см. Рис.5). Поскольку квантовая волатильность линейно масштабируется со временем, но наблюдаемая волатильность масштабируется с квадратным корнем времени, внутренняя линейная ставка масштабируется с $\frac{1}{\sqrt{D}}$. Другими словами, несовместимость между внутренними (субъективными) и измеряемыми (объективными) темпами роста означает, что инвесторы могут воспринимать краткосрочные опционы как подверженные более высоким ежедневным колебаниям, которые повлияют на их оценки цен опционов.

Рисунок 5. Принципиальная схема зависимости волатильности от времени до погашения. Фактическая волатильность актива растет как квадратный корень от времени (красная линия), однако воспринимаемая волатильность масштабируется линейно. Таким образом, при использовании квантовой модели краткосрочная волатильность выглядит намного больше, чем долгосрочная.



Конечно, на инвесторов влияют не только их ментальные модели цен на акции, но и данные о ценах опционов. Это обычно довольно близко соответствует классической модели просто потому, что модель широко используется как покупателями, так и продавцами. Инвесторы также будут знать, что их ментальные прогнозы не всегда идеально согласуются с поведением рынка, поэтому они будут корректировать

свою позицию, чтобы более точно соответствовать рыночному консенсусу, особенно для опционов, которые часто торгуются. Поэтому эффект квантовой модели будет проявляться как корректировка классической модели.

Один из способов проверить наличие такого сигнатурного эффекта – посмотреть на подразумеваемую волатильность. Для конкретного опциона это достигается путем взятия рыночной цены опциона и вычисления волатильности, которая привела бы именно к этой цене при использовании таких моделей, как модель Блэка-Шоулза или классическая биномиальная модель. Таким образом, подразумеваемая волатильность отражает мнение рынка о вероятности изменения цены базовой ценной бумаги. Поэтому представляется разумным ожидать, что подразумеваемая волатильность, отражающая эту психологическую интерпретацию рыночных условий, покажет картину, аналогичную $\frac{1}{\sqrt{D}}$. Действительно, существование такого зависящего от времени члена, появляющегося как поправка к классическому параметру, было отмечено эмпирически, например (Fouque et al., 2004) и (Daglish, Hull & Suo, 2007), где он назван «правилом квадратного корня времени».

На рис. 4 также показано, что цена опциона для квантовой модели незначительно отличается от классической цены при ценах исполнения, близких к цене акции 1, что говорит о том, что подразумеваемая волатильность в квантовой модели отклоняется от базового значения. На рис. 6 показан график предполагаемой поверхности волатильности в этом регионе в зависимости от цены исполнения и времени до погашения. Форма для более коротких сроков погашения имеет некоторое сходство с улыбкой волатильности, встречающейся в эмпирических данных для опционов, однако анализ осложняется тем фактом, что в нем также принимают участие ряд других факторов, таких как спрос и предложение (Wilmott, 2013). Обратите внимание на то, что улыбка волатильности уменьшается со временем до погашения, и средняя подразумеваемая волатильность имеет тенденцию быть немного выше, чем измеренная волатильность, что согласуется с наблюдаемым поведением рынка. Поверхность не показывает зависимость квадратного корня от времени до наступления срока погашения, поскольку этот эффект здесь не моделируется (используемая волатильность является классической, нескорректированной для восприятия инвесторов).

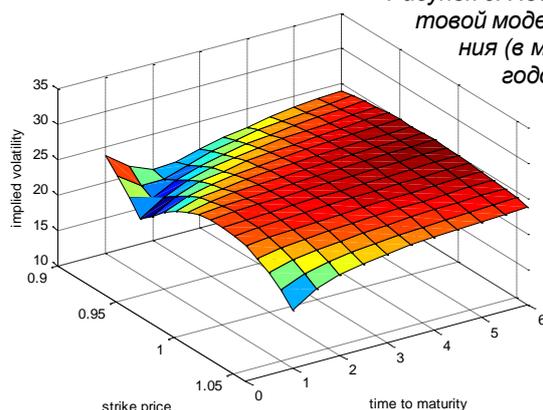


Рисунок 6. Подразумеваемая поверхность волатильности для квантовой модели как функция цены исполнения и времени до погашения (в месяцах), для опциона call с начальной ценой покупки 1, годовой волатильностью 20 процентов и безрисковой процентной ставкой 2 процента.

Поэтому квантовая модель может быть полезна для объяснения некоторых отклонений поведения инвесторов от классической модели. Наконец, отдельное преимущество модели квантового блуждания с точки зрения квантовых вычислений состоит в том, что она может быть непосредственно реализована на квантовом компьютере. Как утверждают исследователи в области квантовых финансов, такие компьютеры, если они станут полностью работоспособными, будут предлагать значительные преимущества скорости для определенных классов проблем (Rebentrost, Gupta & Bromley, 2018; Orús, Mugel & Lizaso, 2019).

6. Выводы

В этом разделе обобщаются результаты и рассматриваются некоторые возможные возражения против квантового подхода. Основной вывод статьи состоит в том, что квантовая модель блуждания предлагает правдоподобную альтернативу случайному блужданию, традиционно используемому в финансах, что дает ряд преимуществ:

- Квантовая модель блуждания захватывает ключевые аспекты поведения инвесторов с бимодальным распределением вероятностей, соответствующем симметричному расхождению во мнениях между покупателями и продавцами.
- Если система измеряется на каждом шаге, то та же квантовая модель коллапсирует к классической модели случайного блуждания, соответствующей измеренным ценам акций.
- Дисперсия растет квадратично во времени, а несоответствие между этим и поведением цены помогает объяснить особенности, включая зависимость цены опциона от времени до погашения.
- Модель отражает субъективные убеждения инвесторов в отсутствии информации и поэтому может быть особенно полезна для опционов, которые редко торгуются.
- Потенциальным преимуществом этой модели является то, что она может быть реализована непосредственно на квантовом компьютере.

Одно из возможных возражений против квантового подхода, с точки зрения традиционной практики, состоит в том, что может показаться странным использование модели цен акций, которая так сильно отличается от стандартного гауссовского распределения, используемого в классических случайных блужданиях. Однако опять же важно отметить, что моделируется не только движение цен на акции, но и представления инвесторов о будущих движениях цен на акции, что не одно и то же. Хотя, конечно, можно моделировать цены акций с помощью квантового формализма, волновая функция цены коллапсирует каждый раз, когда совершается сделка. С опционами этот обвал не происходит таким же образом просто потому, что цены гипотетические. Поэтому можно было бы ожидать, что представления инвесторов о ценах будут более экстремальными и разделенными, чем сами цены.

В то же время цены опционов также определяются динамикой рынка, на которую, в свою очередь, влияет тот факт, что и покупатели, и продавцы в определенной степени опираются на классическую модель ценообразования для опционов. Квантовая модель может быть сделана для аппроксимации классической модели путем добавления степени декогеренции, но также может быть использована для изучения отклонений от классического поведения.

Более общая проблема заключается в том, что опасно импортировать модели непосредственно из физики в экономику (Orrell, 2017). Однако следует отметить две вещи. Во-первых, как уже упоминалось в краткой истории выше, классическое случайное блуждание уже было импортировано из физики в 1950-х годах (даже если оно впервые было использовано в финансах), поэтому представляется разумным обновить его. Во-вторых, если быть точным, обсуждаемая здесь квантовая модель блуждания не импортируется из физики; скорее, это эмпирически проверенная модель из когнитивной психологии, которая распространяется на область финансов. Хотя квантовые модели впервые были разработаны в физике, они все чаще используются в социальных науках и имеют историю в психологии, восходящую, по крайней мере, к началу 1990-х годов (Wendt, 2015). В частности, квантовое вероятностное типа, который используется здесь, можно рассматривать как второй по простоте (после классического) подход к вычислению вероятности, допускающий такие часто встречающиеся в финансах и экономике эффекты, как интерференция (Orrell, 2020a). В своей базовой форме, как она используется здесь, квантовая модель также скупа и не вводит никаких дополнительных параметров (см. Приложение для более сложных версий). Элегантная особенность квантовой модели состоит в том, что при неколлапсировании она отражает субъективный взгляд инвесторов на рынки, в то время как коллапсированное состояние отражает объективную измеряемую природу рынков.

Наконец, результаты этой работы всегда можно воспроизвести, просто предположив, что инвесторы считают дисперсию растущей квадратично со временем, или приняв какое-то другое дополнительное предположение. Однако, как уже говорилось во введении, сила квантового подхода заключается в том, что он делает ряд непараметрических предсказаний когнитивного поведения с использованием согласованной модели, а не требует набора специальных моделей, соответствующих каждому обстоятельству. Квантовая модель также обеспечивает интерфейс для включения других квантовых моделей познания и группового поведения, чтобы моделировать такие вещи, как влияние на оптимизм инвесторов или запутанность между агентами (Orrell, 2020).

Таким образом, квантовое блуждание обеспечивает общую основу для моделирования цен опционов, которая основана на реалистичной модели поведения инвесторов и учитывает разницу между объективными и субъективными оценками волатильности. Модель может быть расширена несколькими способами, например, путем рассмотрения портфелей акций, которые частично коррелированы, или путем объединения с другими моделями из квантового познания или квантовых финансов.

Приложение

Это приложение дает некоторую информацию о более общих версиях квантовой монеты и расширяет модель на портфели, состоящие из двух или более активов.

Другие версии квантовой монеты

Монета Адамара – частный случай $R_{0, \frac{\pi}{4}, 0}$ трехпараметрического оператора $SU(2)$ вида

$$R_{\xi, \theta, \varsigma} = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos(\theta) & e^{i\varsigma} \sin(\theta) \\ e^{-i\varsigma} \sin(\theta) & -e^{-i\xi} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Соответствующее квантовое блуждание будет иметь вид $U_{\xi, \theta, \varsigma} = S \cdot (R_{\xi, \theta, \varsigma} \otimes I)^1$. Применяя к сбалансированному исходному состоянию $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, имеем

$$R\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos(\theta) + ie^{i\varsigma} \sin(\theta) \\ e^{-i\varsigma} \sin(\theta) - ie^{-i\xi} \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

тогда

¹ See: Chandrashekar CM, Srikanth R, and Laflamme R (2008) Optimizing the discrete time quantum walk using a $SU(2)$ coin, Physical Review A 77, 032326. <https://arxiv.org/pdf/0711.1882.pdf>. Note the paper moves $|\uparrow\rangle$ to the left and vice versa, so the polarity is reversed.

$$U_{\xi, \theta, \zeta} \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [(e^{i\xi} \cos(\theta) + ie^{i\zeta} \sin(\theta)) | \uparrow \rangle \otimes | 1 \rangle + (e^{-i\zeta} \sin(\theta) - ie^{-i\xi} \cos(\theta)) | \downarrow \rangle \otimes | -1 \rangle]$$

Например, для монеты Адамара это означает:

$$U_{0, \frac{\pi}{4}, 0} \psi = \frac{1}{2} [(1+i) | \uparrow \rangle \otimes | 1 \rangle + (1-i) | \downarrow \rangle \otimes | -1 \rangle],$$

что дает симметричное распределение вероятностей. Однако если $\xi \neq \zeta$, то лево-правая симметрия нарушается, что влечет степень смещения, даже если начальное состояние сбалансировано. Например, установка $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\xi = 0$ и $\zeta = \frac{\pi}{2}$ дает $R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, что является такой же степенью смещения, как и при старте от начального состояния монеты вверх.

Однопараметрическая версия монеты, которая также широко используется, это

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Как показано в (Romanelli et al., 2004), распределение вероятностей P_i в положении i затем следует уравнению в частных производных

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{\cot^2(\theta)}{2} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} \right) + \cot(\theta) \frac{\partial \beta_i}{\partial x}.$$

Модель с двумя активами

Мы можем использовать тот же подход квантового случайного блуждания для моделирования портфеля из двух активов S и V , таких как акции и опционы. Оператор монеты для системы двух монет существует в четырехмерном гильбертовом пространстве \mathcal{H}_{EC} (Rajendran & Benjamin, 2018). Здесь мы будем использовать $R \otimes R$, где R – это большая монета. Мы устанавливаем такое начальное состояние в виде чтобы $|\psi\rangle = \frac{1}{2} | \uparrow \uparrow \rangle + \frac{i}{2} | \downarrow \downarrow \rangle$, которое является четырехмерной версией используемой выше сбалансированной монеты. Применение этого оператора к исходному состоянию дает

$$(R \otimes R) |\psi\rangle = (R \otimes R) \left(\frac{1}{2} | \uparrow \uparrow \rangle + \frac{i}{2} | \downarrow \downarrow \rangle \right) = \frac{1}{4} (| \uparrow \uparrow \rangle + | \downarrow \uparrow \rangle + | \uparrow \downarrow \rangle + | \downarrow \downarrow \rangle) + \frac{i}{4} (| \uparrow \uparrow \rangle - | \uparrow \downarrow \rangle - | \downarrow \uparrow \rangle + | \downarrow \downarrow \rangle).$$

Предположим, что S эволюционирует либо в $S^+ = S(1+b)$, либо в $S^- = S(1+a)$, а V эволюционирует либо в V^+ , либо в V^- , тогда можно определить оператор трансляции для первого шага как

$$T = | \uparrow \uparrow \rangle \langle \uparrow \uparrow | \otimes | S^+ V^+ \rangle \langle SV | + | \uparrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \downarrow | \otimes | S^+ V^- \rangle \langle SV | + | \downarrow \uparrow \rangle \langle \downarrow \uparrow | \otimes | S^- V^+ \rangle \langle SV | + | \downarrow \downarrow \rangle \langle \downarrow \downarrow | \otimes | S^- V^- \rangle \langle SV |.$$

Обратите внимание, что этот оператор перевода производит сдвиг только тогда, когда монета находится в состояниях $| \uparrow \uparrow \rangle$ или $| \downarrow \downarrow \rangle$. Затем начальное состояние развивается в соответствии с

$$T(R \otimes R) |\psi\rangle = \frac{(i+1)}{4} | \uparrow \uparrow \rangle \otimes | S^+ V^+ \rangle + \frac{(i-1)}{4} | \downarrow \downarrow \rangle \otimes | S^- V^- \rangle.$$

Таким образом, оба актива всегда движутся в одном и том же направлении. Поскольку монета для S сбалансирована, ожидаемое значение S после одного шага равно $\frac{S^+ + S^-}{2}$, и аналогично ожидаемое значение V после одного шага равно $\frac{V^+ + V^-}{2}$.

Поэтому этот метод можно использовать для моделирования хеджируемых портфелей. Пусть $\Pi = V - \Delta S$ – портфель, состоящий из V и короткой продажи доли Δ от S . Тогда за один временной шаг Π может эволюционировать либо в $V^+ - \Delta S^+$, либо в $V^- - \Delta S^-$ с равной вероятностью. Мы можем сделать их равными, установив

$$\Delta = \frac{V^+ - V^-}{S^+ - S^-} = \frac{V^+ - V^-}{(b-a)S}$$

Если мы запишем стоимость портфеля после одного временного шага как $\Pi = \Pi + \delta\Pi$, где

$$\delta\Pi = (V^+ - \Delta S^+) - (V - \Delta S) = (V^- - \Delta S^-) - (V - \Delta S),$$

тогда нам нужно $\delta\Pi = r\Pi$, чтобы избежать арбитражных возможностей (Wilmott, 2013). Использование выражения для Δ и решение для V тогда дает

$$V = \frac{1}{(1+r)(b-a)} [(r-a)V^+ + (b-r)V^-]$$

Поэтому мы можем определить новый оператор перевода, который описывает цену портфеля за один временной шаг как

$$T = | \uparrow \uparrow \rangle \langle \uparrow \uparrow | \otimes | \Pi^+ \rangle \langle \Pi | + | \uparrow \downarrow \rangle \langle \uparrow \downarrow | \otimes | \Pi^\pm \rangle \langle \Pi | + | \downarrow \uparrow \rangle \langle \downarrow \uparrow | \otimes | \Pi^\mp \rangle \langle \Pi | + | \downarrow \downarrow \rangle \langle \downarrow \downarrow | \otimes | \Pi^- \rangle \langle \Pi |,$$

где смешанные члены $\Pi^\pm = V^+ - \Delta S^-$ и $\Pi^\mp = V^- - \Delta S^+$. Эти смешанные члены не появляются в начальном состоянии ψ и не производятся через оператор подбрасывания монеты, поэтому не играют никакой роли. Портфель может принимать только значения Π^+ или Π^- , которые считаются одинаковыми. Поэтому его цена развивается по безрисковой ставке, как и в классическом случае. Один из способов интерпретировать это состоит в том, что два актива (здесь акция и опцион) совершенно запутаны. Степень запутанности может быть изменена путем выбора другого начального состояния, которое включает смешанные члены.

References

1. Aharonov Y, Davidovich L & Zagury N (1993). Quantum random walks. *Physical Review A* 48(2):1687.
2. Baaquie BE (2007). *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates* (Cambridge: Cambridge University Press)
3. Bachelier L (1900). Théorie de la spéculation *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3 (17): 21–86.
4. Black F, Scholes M (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81(3): 637-654.
5. Brun TA, Carteret HA, and Ambainis A (2003). Quantum random walks with decoherent coins. *Physical Review A* 67(3), 032304.
6. Busemeyer JR & Bruza P (2012). *Quantum Models of Cognition and Decision*. Cambridge: Cambridge University Press.
7. Busemeyer JR, Wang Z, and Shiffrin RS (2015) Bayesian model comparison favors quantum over standard decision theory account for dynamic inconsistency. *Decision* 2: 1–12.
8. Chandrashekar CM, Srikanth R & Laflamme R (2008). Optimizing the discrete time quantum walk using a SU(2) coin. *Physical Review A* 77, 032326.
9. Chen Z (2004) Quantum theory for the binomial model in finance theory. *Journal of Systems Science and Complexity* 17(4): 567-573.
10. Childs AM (2009). Universal computation by quantum walk. *Physical Review Letters* 102(18):180501.
11. Childs AM, Goldstone J (2004). Spatial search by quantum walk. *Physical Review A* 70(2):022314.
12. Clark M (director), (1999). *The Midas Formula* (motion picture). Transcript available at <https://www.pbs.org/wgbh/nova/transcripts/2704stockmarket.html>
13. Cootner PH (1964). *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, MA: MIT Press.
14. Cox JC, Ross SA & Rubinstein M (1979), Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics* 7(3): 229-263.
15. Cowles A (1933). Can stockmarket forecasters forecast? *Econometrica* 12: 206–214.
16. Daglish T, Hull J & Suo W (2007). Volatility surfaces: theory, rules of thumb, and empirical evidence. *Quantitative Finance* 7(5): 507-524.
17. Fama EF (1965). *Random walks in stock-market prices*. Chicago: Graduate School of Business, University of Chicago.
18. Fouque JP, Papanicolaou G, Sircar R et al. (2004). Maturity Cycles in Implied Volatility. *Finance and Stochastics* 8: 451.
19. Fuss IG, Navarro DJ (2013). Open Parallel Cooperative and Competitive Decision Processes: A Potential Provenance for Quantum Probability Decision Models. *Topics in Cognitive Science* 5(4): 818-843.
20. Gold JI, Shadlen MN (2007). The neural basis of decision making. *Annual review of neuroscience* 30: 535-74.
21. Grover LK (1996). *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, (May 1996) p. 212.
22. Haven E, Khrennikov A (2013). *Quantum Social Science*. Cambridge: Cambridge University Press.
23. Höne KE (27 April 2017). Quantum Social Science. *Oxford Bibliographies*. Available at: <http://www.oxfordbibliographies.com/view/document/obo-9780199743292/obo-9780199743292-0203.xml>
24. Kempe J (2003). Quantum random walk – an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44:307.
25. Kendall MG, Hill AB (1953). The Analysis of Economic Time-Series – Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 116(1): 11–34.
26. Kendon V and Tregenna B (2003). Decoherence can be useful in quantum walks. *Physical Review A* 67, 042315.
27. Kvam PD, Pleskac TJ, Yu S, Busemeyer JR (2015). Quantum interference in evidence accumulation. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112 (34): 10645-10650.
28. Lo AW (2008). Efficient Markets Hypothesis. In *The New Palgrave Dictionary of Economics, Second Edition*, edited by Durlauf SN and Blume LE.
29. Mackay TD, Bartlett SD, Stephenson LT and Sanders BC (2002). Quantum walks in higher dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 35(12): 2745-2753.
30. Martínez-Martínez I, Sánchez-Burillo E (2016). Quantum stochastic walks on networks for decision-making. *Scientific Reports* 6: 23812.
31. Mohseni M, Rebentrost P, Lloyd S, Aspuru-Guzik A (2008). Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of chemical physics* 129(17):11B603.
32. Orrell D (2017). *Economyths: 11 Ways Economics Gets It Wrong*. London: Icon Books.
33. Orrell D (2020) A quantum model of supply and demand. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 539 (forthcoming).
34. Orrell D (2020a). The value of value: a quantum approach to economics, security and international relations. *Security Dialogue* (forthcoming).

35. Orús R, Mugel S, Lizaso E (2019). Quantum computing for finance: Overview and prospects. *Reviews in Physics* 4: 100028.
36. Osborne MFM (1959), Brownian motion in the stock market. *Operations Research* 7(2), 145–73.
37. Park JJ (2016). Decision-Making & Quantum Mechanical Models of Cognitive Processing. *Journal of Cognitive Science* 17(2): 199-228,
38. Pearson K (1905). The problem of the random walk. *Nature* 72(1865), 294.
39. Rajendran J, Benjamin C (2018) Implementing Parrondo's paradox with two-coin quantum walks, *Royal Society Open Science* 5(2): 171599.
40. Rebentrost P, Gupt B, Bromley TR (2018). Quantum computational finance: Monte Carlo pricing of financial derivatives. *Physical Review A* 98(2): 022321.
41. Romanelli A, Sicardi Schifino AC, Siri R, Abal G, Auyuanet A & Donangelo R (2004). Quantum random walk on the line as a Markovian process. *Physica A* 338(3–4): 395–405.
42. Roos N (2014), Entropic forces in Brownian motion, *American Journal of Physics* 82(12): 1161-1166.
43. Sánchez-Burillo E, Duch J, Gómez-Gardenes J, Zueco D (2012). Quantum navigation and ranking in complex networks. *Scientific reports* 2:605.
44. Sephton B, Dudley A, Ruffato G, Romanato F, Marrucci L, Padgett M, et al. (2019) A versatile quantum walk resonator with bright classical light. *PLoS ONE* 14(4): e0214891.
45. Shenvi N, Kempe J, Whaley KB (2003). Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A* 67(5):052307.
46. Wang J, Manouchehri K (2013). *Physical implementation of quantum walks*. Berlin: Springer.
47. Wang Z, Busemeyer JR (2016). Comparing quantum versus Markov random walk models of judgements measured by rating scales. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 374(2058).
48. Wang Z, Solloway T, Shiffrin RS, and Busemeyer JR (2014) Context effects produced by question orders reveal quantum nature of human judgments. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111 (26): 9431–6.
49. Wendt A (2015). *Quantum Mind and Social Science: Unifying Physical and Social Ontology*. Cambridge: Cambridge University Press.
50. Wilmott P (2013). *Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3 Volume Set, 2nd Edition*. Chichester, UK: Wiley.
51. Wilmott P, Orrell D (2017). *The Money Formula: Dodgy Finance, Pseudo Science, and How Mathematicians Took Over the Markets*. Chichester: Wiley.
52. Yang YG, Pan QX, Sun SJ, Xu P (2015). Novel image encryption based on quantum walks. *Scientific Reports* 5:7784.
53. Yukalov VI & Sornette D (2015), Preference reversal in quantum decision theory, *Frontiers in Psychology*, 6: 1–7.
54. Yukalov VI & Sornette D (2018), Quantitative Predictions in Quantum Decision Theory, *IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics: Systems* 48 (3), 366-381.

Ключевые слова: финансовые опционы, квантовое блуждание, квантовые финансы, квантовое познание, квантовые вычисления

David Orrell, A quantum walk model of financial options

DOI: 10.34706/DE-2020-02-05

JEL classification: D82 Asymmetric and Private Information, D83 Search, Learning, and Information

Keywords:

financial options, quantum walk, quantum finance, quantum cognition, quantum computing

Abstract

Financial markets are often modeled using a random walk, for example in the binomial option pricing model which is a discrete version of the Black-Scholes formula. This paper presents an alternative approach to option pricing based on a quantum walk model. The quantum walk, which incorporates superposition states and allows for effects such as interference, was originally developed in physics, but has also seen application in areas such as cognitive psychology, where it is used to model dynamic decision-making processes. It is shown here that the quantum walk model captures key aspects of investor behavior, while the collapsed state captures the observed behavior of markets. The resulting option price model agrees quite closely with the classical random walk model but helps to explain features such as the observed dependence of price on time to maturity. The method also has the advantage that it can be run directly on a quantum computer.